8. osztály, 1. kategória

1. Biri néni udvarában kacsák és tyúkok vannak, összesen 80-an. A kacsák számának négyszerese több a tyúkok számának ötszörösénél, valamint a tyúkok számának négyszerese több a kacsák számának háromszorosánál. Hány kacsája és hány tyúkja van Biri néninek?

Első megoldás:

Legyen a kacsák száma x, ekkor a tyúkok száma $80-x$. 1 pont

Az első feltételből $4\cdot x>5\cdot(80-x)$,

amiből $4x>400-5x$, vagyis $9x>400$, és így $x>\frac{400}{9}=44\frac{4}{9}$ adódik. 3 pont

A második feltételből $4\cdot(80-x)>3\cdot x$,

amiből $320-4x>3x$, vagyis $320>7x$, és így $x<\frac{320}{7}=45\frac{5}{7}$ adódik. 3 pont

Mivel x egész szám, és $44\frac{4}{9}<x<45\frac{5}{7}$, ezért csak $x=45$ lehetséges, ekkor $80-x=35$. 1 pont

Ellenőrzés: $4\cdot 45=180>5\cdot 35=175$ és $4\cdot 35=140>3\cdot 45=135$. 1 pont

Biri néninek 45 kacsája és 35 tyúkja van. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Legyen a kacsák száma x, a tyúkok száma y, ekkor $x+y=80$. 1 pont

Az első feltételből $4x>5y$ adódik.

Induljunk ki az $x=40$ és $y=40$ esetből. Ekkor $4\cdot 40>5\cdot 40$ $(160>200)$ nem teljesül.

Ha $x=41$ és $y=39$, akkor $4\cdot 41>5\cdot 39$ (azaz $164>195$) sem teljesül.

Ha x értékét 1-gyel növeljük, y értékét pedig 1-gyel csökkentjük, akkor a bal oldal 4-gyel nő, a jobb oldal 5-tel csökken, tehát a jobb és a bal oldal különbsége 9-cel csökken.

Mivel kezdetben a két oldal különbsége $200-160=40$ volt, továbbá $\frac{40}{9}\approx 4,4$,

ezért 4 lépés után a $4\cdot 44>5\cdot 36$ (azaz $176>180$) feltétel még nem teljesül,

de 5 lépés után ($x=45$ és $y=35$ esetén) a $4\cdot 45>5\cdot 35$ (azaz $180>175$) feltétel már igen.

Innentől a $4x>5y$ feltétel mindig teljesül, tehát az első feltétel $x\ge 45$ esetén igaz. 3 pont

A második feltételből $4y>3x$ adódik,

amely $x=40$ és $y=40$ esetén teljesül, hiszen $4\cdot 40>3\cdot 40$ (azaz $160>120$).

Ha x értékét 1-gyel növeljük, y értékét pedig 1-gyel csökkentjük, akkor a jobb oldal 3-mal nő, a bal oldal 4-gyel csökken, tehát a bal és a jobb oldal különbsége 7-tel csökken.

Mivel kezdetben a két oldal különbsége $160-120=40$ volt, továbbá $\frac{40}{7}\approx 5,7$,

ezért 5 lépés után ($x=45$ és $y=35$ esetén) a $4\cdot 35>3\cdot 45$ (azaz $140>135$) feltétel még teljesül, de 6 lépés után a $4\cdot 34>3\cdot 46$ (azaz $136>138$) feltétel már nem.

Innentől a $4y>3x$ feltétel már sosem teljesül, tehát a második feltétel $x\le 45$ esetén igaz. 3 pont

Mivel a feladat két feltételéből $x\ge 45$ és $x\le 45$ következett,

ezért csak $x=45$ lehetséges, ekkor $y=35$. 1 pont

Ellenőrzés: $4\cdot 45=180>5\cdot 35=175$ és $4\cdot 35=140>3\cdot 45=135$. 1 pont

Biri néninek 45 kacsája és 35 tyúkja van. 1 pont

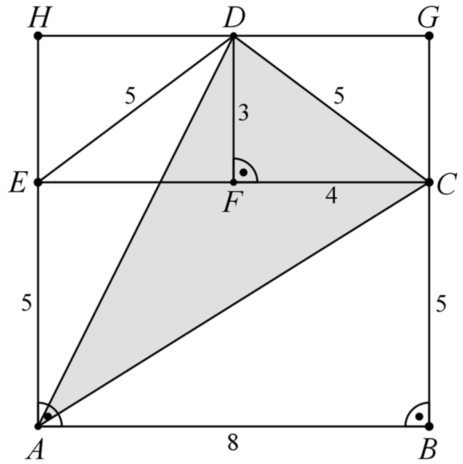
Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Ha a versenyző a második megoldáshoz hasonlóan kipróbál számpárokat, de nem indokolja, hogy a két érték változtatásakor hogyan változnak a relációk két oldalán álló számok, és így melyik értéknél változik meg a reláció igazságértéke, akkor az erre a részre járó 3-3 pontból legfeljebb 1-1 pontot kaphat.

2. Az $ABCDE$ ötszögben $AB = 8$ cm, valamint $BC = CD = DE = EA = 5$ cm. Az ötszög A, illetve B csúcsnál lévő belső szögei derékszögek. Hány négyzetcentiméter az ACD háromszög területe?

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit!

$ABCE$ téglalap (mivel A-nál és B-nél derékszöge van, továbbá $AE = BC$), így $CE = 8$ cm. 2 pont

Jelöljük a CDE egyenlő szárú háromszögben CE felezőpontját F-fel, ekkor a DFC derékszögű háromszögben $FC = 4$ cm, és így a Pitagorasz-tételből $DF^2 + 4^2 = 5^2$, vagyis $DF^2 = 25 - 16 = 9$, ebből (mivel DF pozitív) $DF = 3$ cm. 2 pont

Az $ABCDE$ ötszög az ábra szerint befoglalható a 8 cm oldalhosszú $ABGH$ négyzetbe. 1 pont

Az ACD háromszög területére teljesül, hogy $T_{ACD} = T_{ABGH} - (T_{ABC} + T_{CGD} + T_{DHA})$. 1 pont

Az ABC, CGD, DHA háromszögek derékszögűek, így területük a befogóik szorzatának fele, vagyis $T_{ABC} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20\text{ cm}^2$, $T_{CGD} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\text{ cm}^2$ és $T_{DHA} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16\text{ cm}^2$. 2 pont

Ekkor $T_{ACD} = 64 - (20 + 6 + 16) = 22\text{ cm}^2$. 1 pont

Az ACD háromszög területe 22 cm^2. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Hány olyan hétjegyű pozitív egész szám van, amelyben három 1-es, két 2-es és két 3-as számjegy szerepel, és azonos számjegyek nem állnak egymás mellett?

Megoldás:

Csoportosítsuk az eseteket aszerint, hogy hol helyezkedik el a három 1-es a számban.

Ha a 2-esek és a 3-asok helyét *-gal jelöljük, akkor az 1-esek helye alapján a következő 10 eset lehetséges:

1*1*1**	1*1***1	1**1**1	*1*1*1*	*1**1*1
1*1**1*	1**1*1*	1***1*1	*1*1**1	**1*1*1

2 pont

A *-ok helyére két 2-est és két 3-ast kell elhelyeznünk. Ha egynél több * szerepel egymás mellett, akkor ide csak váltakozva kerülhetnek 2-esek és 3-asok. 1 pont

Vizsgáljuk a fenti 10 esetet a szomszédos *-ok darabszáma szerint csoportosítva.

Ez (a sorrendtől eltekintve) 4-féle lehet: 1+1+1+1, 1+1+2, 1+3, illetve 2+2. 1 pont

- Az 1+1+1+1 esetben (*1*1*1*) a két 2-es bárhová kerülhet, ezután a 3-asok helye már egyértelmű, itt tehát $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ megfelelő számot kapunk. 1 pont
- Az 1+1+2 esetben (1*1*1**, 1*1**1*, 1**1*1*, *1*1**1, *1**1*1, illetve **1*1*1) a ** kitöltése kétféle lehet (23 vagy 32), valamint a fennmaradó két helyre is kétféleképp kerülhet a megmaradt 2-es és 3-as, ez tehát $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség.
  Mivel 6-féle 1+1+2 eset volt, ezért itt $6 \cdot 4 = 24$ számot kapunk. 2 pont
- Az 1+3 esetben (1*1***1, illetve 1***1*1) a *** kitöltése kétféle lehet (232 vagy 323), a megmaradt 2-es vagy 3-as helye egyértelmű, ezért itt $2 \cdot 2 = 4$ számot kapunk. 1 pont

- A 2+2 esetben (1**1**1) mindkét ** helyére egy-egy 2-es és 3-as kerül (23 vagy 32), ami egymástól függetlenül 2-2 lehetőséget jelent, ezért itt $2 \cdot 2 = 4$ számot kapunk. 1 pont

A keresett hétjegyű pozitív egész számok száma $6 + 24 + 4 + 4 = 38$. 1 pont

Összesen: 10 pont

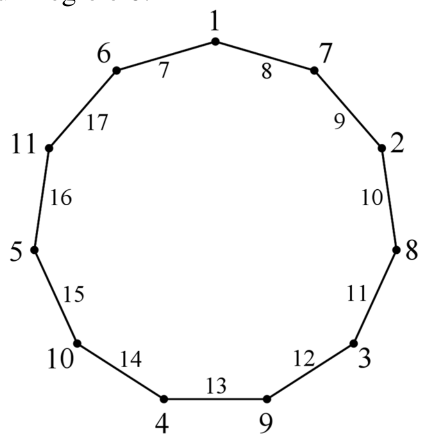
4. a) El lehet-e helyezni az első 10 pozitív egész számot egy konvex tízszög csúcsaiban olyan módon, hogy ha a tízszög minden oldalára ráírjuk a két végpontjában álló számok összegét, akkor (valamilyen sorrendben) 10 szomszédos egész számot kapjunk?

b) El lehet-e helyezni az első 11 pozitív egész számot egy konvex tizenegyszög csúcsaiban olyan módon, hogy ha a tizenegyszög minden oldalára ráírjuk a két végpontjában álló számok összegét, akkor (valamilyen sorrendben) 11 szomszédos egész számot kapjunk?

Megoldás:

a) Ha összeadjuk a tízszög oldalaira írt számokat, akkor minden csúcsba írt számot kétszer számolunk az összegben (a csúcsra illeszkedő két szomszédos oldalnál), így az oldalakra írt számok összege $2 \cdot (1 + 2 + ... + 10) = 2 \cdot 55 = 110$. 2 pont
Így azt kell megvizsgálnunk, hogy lehet-e 10 szomszédos egész szám összege 110.
Mivel 10 szomszédos egész szám között mindig 5 páros és 5 páratlan található, ezért ezek összege mindig páratlan, vagyis nem lehet 110. 2 pont
A tízszög csúcsaiban nem lehet elhelyezni a számokat a megadott módon. 1 pont

b) Az a) feladatrészhez hasonlóan az oldalakra írt számok összege $2 \cdot (1 + 2 + ... + 11) = 132$, amely úgy lehet 11 szomszédos egész szám összege, ha a középső szám $132 : 11 = 12$, vagyis az oldalakra írt számok valamilyen sorrendben 7, 8, …, 17. 1 pont
Az alábbi konstrukció például megfelelő: 3 pont



A tizenegyszög csúcsaiban el lehet helyezni a számokat a megadott módon. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Hány olyan háromjegyű n pozitív egész szám van, amelynek az összes pozitív osztója közül…
a) a páros osztók száma páros, és a páratlan osztók száma páratlan?
b) a páros osztók száma páratlan, és a páratlan osztók száma páros?

Megoldás:

Mindkét részfeladatban felhasználjuk a következőket:
A pozitív egészek közül a négyzetszámoknak páratlan, a nem négyzetszámoknak páros számú osztója van, hiszen ha felsoroljuk egy szám osztóit osztópárok formájában, akkor a nem négyzetszámoknál a párok tagjai mind különbözők, a négyzetszámoknál pedig az egyik osztónak saját maga lesz a párja. 2 pont
Keressük a számot $n = 2^a \cdot b$ alakban, ahol a természetes szám, b páratlan pozitív egész.
Ekkor n páratlan osztói megegyeznek b osztóival, n páros osztóit pedig úgy kapjuk meg, hogy b osztóit megszorozzuk egy olyan 2-hatvánnyal, amelynek kitevője 1 és a közötti.
Így n páros osztóinak száma éppen a-szorosa a páratlan osztók, azaz b osztói számának. 2 pont

a) Mivel n páratlan osztóinak száma páratlan, így b négyzetszám.
Mivel n páros osztóinak száma páros, ami egy páratlan szám a-szorosa, így a páros. 1 pont
Ekkor 2^a is négyzetszám, b is négyzetszám, tehát $n = 2^a \cdot b$ is négyzetszám. A keresett n számok éppen a háromjegyű négyzetszámok, $10^2 = 100$-tól $31^2 = 961$-ig. 2 pont
22 ilyen háromjegyű szám van. 1 pont

b) Mivel n páros osztóinak száma páratlan, páratlan osztóinak száma pedig páros, és a páros osztók száma a-szorosa a páratlan osztók számának, ezért azt kapjuk, hogy egy páratlan szám többszöröse egy páros számnak, ami lehetetlen. 1 pont
Nincs ilyen háromjegyű szám. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
Az indoklásban felhasználhatjuk az osztók számára vonatkozó képletet is:
Egy szám osztóinak számát megkaphatjuk, ha összeszorozzuk a prímtényezős felbontásában szereplő kitevőknél 1-gyel nagyobb számokat.

* * * * *

Több megoldásból csak egy kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.
A dolgozatok pontszámai 2024. március 26-án kerülnek fel a www.mategye.hu honlapra. A versenyzők a saját pontszámukat (a feladatlapon lévő számmal), az iskolák a tanulóik pontszámát (az iskolai kódszámmal és jelszóval) tekinthetik meg. A pontszámokkal kapcsolatban 2024. március 28-án 14 óráig lehet reklamálni a Mategye Alapítvány címére küldött e-mailben (mategye@mategye.t-online.hu). Az eredményhirdetésre meghívott tanulók névsora 2024. április 1-től lesz látható.

Kecskemét, 2024. március 5.

A Szervezőbizottság