8. osztály, 2. kategória

1. András és Béla együtt, ugyanazon a távon, ugyanakkora sebességgel szoktak kerékpározni. Egyik alkalommal András az indulástól a táv feléig a szokásosnál 40%-kal nagyobb sebességgel haladt, majd a táv felénél ezt az aktuális sebességét 40%-kal csökkentette, és így fejezte be a távot. Béla ugyanakkor az indulástól a táv feléig a szokásosnál 40%-kal kisebb sebességgel tekert, majd féltávnál 40%-kal növelte addigi sebességét, és ezzel kerékpározott a célig. Hányszor annyi idő alatt tette meg ekkor a távot Béla, mint András?

Megoldás:

Jelölje a fiúk szokásos sebességét v, a táv felét pedig s.

Legyen v mértékegysége km/h, s mértékegysége pedig km.

András a táv első felét $1,4v$ sebességgel tette meg, 1 pont

a másik felét pedig $1,4v\cdot 0,6=0,84v$ sebességgel. 1 pont

Így a teljes táv megtételéhez Andrásnak $t_A=\frac{s}{1,4v}+\frac{s}{0,6\cdot 1,4v}$ időre volt szüksége. 1 pont

Béla a táv első felét $0,6v$ sebességgel tette meg, 1 pont

a másik felét pedig $0,6v\cdot 1,4=0,84v$ sebességgel. 1 pont

Így Béla esetén a teljes táv megtételéhez szükséges idő: $t_B=\frac{s}{0,6v}+\frac{s}{0,6\cdot 1,4v}$. 1 pont

Mivel $t_A=\frac{s}{1,4v}+\frac{s}{0,6\cdot 1,4v}=\frac{1,6s}{0,84v}$ és $t_B=\frac{s}{0,6v}+\frac{s}{0,6\cdot 1,4v}=\frac{2,4s}{0,84v}$, 1 pont

ezért $\frac{t_B}{t_A}=\frac{\frac{2,4s}{0,84v}}{\frac{1,6s}{0,84v}}=$ 1 pont

$=\frac{2,4s}{0,84v}\cdot\frac{0,84v}{1,6s}=1,5$. 1 pont

Béla másfélszer annyi idő alatt tette meg a teljes távot, mint András. 1 pont

Összesen: 10 pont

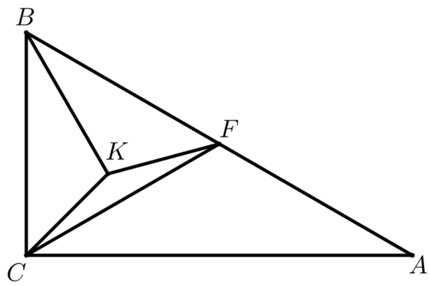
2. Az ABC derékszögű háromszögben a beírt kör középpontja K, az AB átfogó felezőpontja pedig F. A CK szakasz hossza 4 cm és a CAB szög 30°-os.

a) Milyen hosszú a KF szakasz?

b) Hány négyzetcentiméter a CFK háromszög területe?

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát!



a) Mivel a CAB szög 30°-os, ezért az ABC szög 60°-os, és Thalész tételének megfordításából következik, hogy F az ABC háromszög köré írt körének középpontja, így $FB=FC$. 1 pont

A CFB háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapon fekvő szöge 60°-os, ezért a CFB háromszög szabályos. 1 pont

A BK félegyenes az $ABC\sphericalangle$ szögfelezője, ezért $FBK\sphericalangle=KBC\sphericalangle=30°$,

a CK félegyenes pedig a $BCA\sphericalangle$ szögfelezője, ezért $BCK\sphericalangle=45°$. 1 pont

A BCK és BKF háromszögek egybevágók, ugyanis a BK oldaluk közös, $FB=FC$

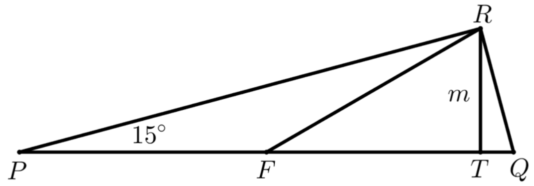
és a két oldal által közbezárt szögük is megegyezik: $FBK\sphericalangle=KBC\sphericalangle=30°$. 1 pont

Mivel a BFC háromszög szabályos, a K pont illeszkedik az $FBK\sphericalangle$ szögfelezőjére, ami egyben CF oldalfelező merőlegese is, ezért $KF = CK = 4\,\text{cm}$. 1 pont

b) A CFK háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárak által bezárt szög:
$FKC\sphericalangle = 360° - 2 \cdot CKB\sphericalangle = 360° - 2 \cdot (180° - 30° - 45°) = 150°$,
az alapon fekvő szögek pedig 15 fokosak. 1 pont

Ezt a háromszöget az alaphoz tartozó magassága két olyan egybevágó derékszögű háromszögre bontja, amelyek hegyesszögei 75 és 15 fokosak, átfogója pedig 4 cm hosszú.
Az ilyen derékszögű háromszögekben az átfogóhoz tartozó magasság hossza negyede az átfogó hosszának. 1 pont

Ezt az állítást az alábbi ábrát felhasználva a következőképpen bizonyíthatjuk.



Ha F a PQ átfogó felezőpontja, akkor Thalész tételének megfordítása alapján $PF = FQ = FR$. Ebből következik, hogy a PFR háromszög egyenlő szárú, szárak által bezárt szöge 150 fokos, így az RFT szög 30 fokos. 1 pont

Mivel az RFT derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele,
ezért $m = RT = \frac{FR}{2} = \frac{PQ}{4}$. 1 pont

Mivel a CFK háromszög két olyan „15 fokos” derékszögű háromszögre bontható, amelyek átfogója 4 cm hosszú, ezért $T_{CFK} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 1}{2} = 4\ \text{cm}^2$. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. A tízes számrendszerben felírt n pozitív egész szám *fitt*, ha 0-tól különböző számjegyeinek szorzata osztója n-nek. Bizonyítsd be, hogy nem lehet megadni 14 egymást követő pozitív egész számot úgy, hogy mindegyik *fitt* legyen! (Ha egy számnak egyetlen 0-tól különböző számjegye van, akkor ezt a számjegyet tekintjük a 0-tól különböző számjegyek szorzatának.)

Megoldás:

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy van 14 egymást követő fitt szám. 1 pont

Mivel 14 egymást követő fitt szám között mind a 10-féle lehetséges végződés előfordul, ezért van közöttük 3-ra végződő, jelölje ezt k. Mivel az első 12 pozitív egész szám fitt, a 13 viszont nem fitt, ezért $k > 13$. 1 pont

Mivel k fitt, és 3-ra végződik, ezért osztható 3-mal. 1 pont

Ha k 3-ra végződik, akkor $k + 10$ is 3-ra végződik. 1 pont

Viszont mivel k osztható 3-mal, ezért $k + 10$ nem osztható 3-mal, ezért nem fitt. 1 pont

Ha k 3-ra végződik, akkor $k - 4$ 9-re végződik. 1 pont

A k osztható 3-mal, ezért $k - 4$ nem osztható 3-mal, így 9-cel sem, ezért nem fitt. 1 pont

Azt kaptuk, hogy egymást követő fitt számok csak $k - 3$-tól $k + 9$-ig lehetnek. 1 pont

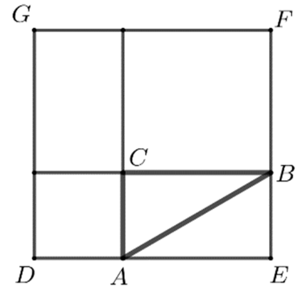
Ez viszont csak 13 darab egymást követő szám. 1 pont

Ebből következik, hogy a feltevésünk hamis, azaz nincs 14 darab egymást követő fitt pozitív egész szám. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Meg lehet adni 13 egymást követő fitt pozitív egész számot. Ha $k = 1111011111000$, akkor k, $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + 12$ mind fitt számok, és ez a legkisebb megfelelő konstrukció. Bizonyítható, hogy végtelen sok „fitt tizenhármas” van.

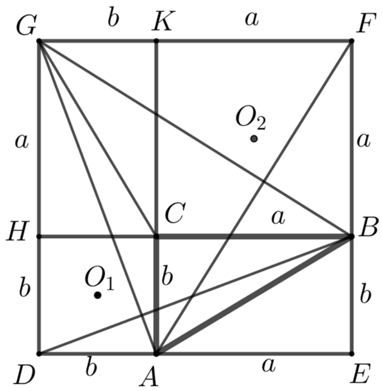
4. Az ABC derékszögű háromszög befogóira kifelé négyzeteket rajzoltunk, majd megrajzoltuk a $DEFG$ négyszöget az ábrán látható módon.
a) Bizonyítsd be, hogy a C és G pontokra illeszkedő egyenes merőleges az AB egyenesre!
b) Bizonyítsd be, hogy a C és G pontokon átmenő egyenes illeszkedik az AF és BD szakaszok metszéspontjára!



Megoldás:

a) A feltételekből adódóan a $DEFG$ négyszög négyzet, oldalainak hossza az ABC háromszög befogói hosszának összege. 1 pont

Vegyük fel az ábrába a CG, AG, AF, GB és BD szakaszokat, valamint a $DACH$ négyzet O_1 és a $CBFK$ négyzet O_2 középpontját.



1 pont

Ha az ABD háromszöget O_1 körül +90°-kal (az óramutató járásával ellentétes irányban) elforgatjuk, akkor az CGA háromszöget kapjuk, ugyanis a D pont az A pontba, az A pont a C pontba, 1 pont

a $DEBH$ téglalap DB átlója pedig az $AKGD$ téglalap AG átlójába kerül.
Ez pedig azt jelenti, hogy a B képe a G lesz. 1 pont

A két háromszög egymásnak megfelelő oldalegyenesei a forgatás következtében merőlegesek egymásra, 1 pont

amiből következik, hogy a CG és AB egyenesek valóban merőlegesek. 1 pont

b) Az előző alpontbeli forgatás következményeként a BD egyenes merőleges az AG egyenesre. 1 pont

Ha a BG szakaszt O_2 körül +90°-kal elforgatjuk, akkor B az F-be, G pedig az A-ba kerül, azaz a BG szakasz képe az FA szakasz lesz, 1 pont

tehát a forgatás miatt a BG egyenes merőleges az AF egyenesre. 1 pont

Azt kaptuk, hogy az ABG háromszögnek az AF, BD és CG egyenesek a magasságvonalai, ezért ezek egy pontban metszik egymást. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Egy n oldalú szabályos sokszög csúcsaiba tetszés szerint az 1 vagy a -1 számot írjuk. Egy lépésben bármely három szomszédos csúcsba írt szám előjelét egyidejűleg ellenkezőjére változtathatjuk. (Például az 1; -1; 1 szomszédos hármast a -1; 1; -1 hármasra cserélhetjük.) Elérhető-e véges sok lépéssel tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokba írt számok összege 0 legyen, ha
a) $n = 2023$?
b) $n = 2024$?
c) $n = 2026$?

Megoldás:

a) A sokszög csúcsaiba írt számok összege csak úgy lehet 0, ha ugyanannyi csúcsban áll -1, mint amennyiben 1. 1 pont

Ez viszont csak akkor valósulhat meg, ha a sokszögnek páros számú csúcsa van.
A 2023 páratlan szám, ezért ebben az esetben semmilyen kezdőhelyzetből

nem érhető el a 0 összeg. 1 pont

b) A 2024 osztható 4-gyel, ezért a sokszög csúcsai feloszthatók 506 darab, egyenként 4 egymást követő csúcsot tartalmazó, közös csúcs nélküli csúcsnégyesre. Bebizonyítjuk, hogy minden ilyen csúcsnégyes esetén legfeljebb két lépéssel el tudjuk érni, hogy a rájuk írt számok összege 0 legyen, így a teljes sokszög esetében is elérhető a 0 összeg. 1 pont

Ezekre a csúcsnégyesekre írt számok között a -1-esek száma 0; 1; 2; 3; 4 lehet. 2 darab -1 esetén készen vagyunk. 1 pont

Ha a -1-esek száma 0, akkor a következő két lépés vezet el a 0 összeghez: $(\mathbf{1};\mathbf{1};\mathbf{1};1)\rightarrow(-1;-\mathbf{1};-\mathbf{1};\mathbf{1})\rightarrow(-1;1;1;-1)$. 1 pont

Ha a -1-esek száma 1, akkor ez az 1 darab -1 vagy a számnégyes szélén vagy a belsejében helyezkedik el. Az első esetben a $(-\mathbf{1};\mathbf{1};\mathbf{1};1)\rightarrow(\mathbf{1};-\mathbf{1};-\mathbf{1};1)$ típusú lépés, a második esetben az $(1;\mathbf{1};-\mathbf{1};\mathbf{1})\rightarrow(1;-\mathbf{1};\mathbf{1};-\mathbf{1})$ típusú lépés állítja elő a 0 összeget. 1 pont

Mivel a -1-esek és az 1-esek szerepe minden egyes négyesen belül felcserélhető, ezért 3, illetve 4 darab -1 esetén ugyanilyen típusú lépésekkel érhető el a 0 összeg. 1 pont

c) A 2026 szám 4-gyel osztva 2 maradékot ad, ezért itt nem alkalmazható közvetlenül a b) pontban leírt módszer. Két esetet kell most megkülönböztetnünk. 1 pont

1. Ha van -1 is és 1 is a csúcsokra írt számok között, akkor valahol fellép a $(-1;1)$ vagy az $(1;-1)$ szomszédos pár. Ezt érintetlenül hagyjuk, a maradék 2024 csúccsal pedig azt tesszük, amit a *b*) pontban tettünk, így elérhető a 0 összeg. 1 pont

2. Ha a kezdő helyzetben mindegyik csúcsban 1 (vagy -1) áll, akkor egyetlen lépéssel elérhető, hogy az 1. eset valósuljon meg, azaz ebből a helyzetből is elérhető a 0 összeg. 1 pont

Összesen: 10 pont

* * * * *

Több megoldásból csak egy kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.

A dolgozatok pontszámai 2024. március 26-án kerülnek fel a www.mategye.hu honlapra. A versenyzők a saját pontszámukat (a feladatlapon lévő számmal), az iskolák a tanulóik pontszámát (az iskolai kódszámmal és jelszóval) tekinthetik meg. A pontszámokkal kapcsolatban 2024. március 28-án 14 óráig lehet reklamálni a Mategye Alapítvány címére küldött e-mailben (mategye@mategye.t-online.hu). Az eredményhirdetésre meghívott tanulók névsora 2024. április 1-től lesz látható.

Kecskemét, 2024. március 5.

A Szervezőbizottság