7. osztály, 1. kategória

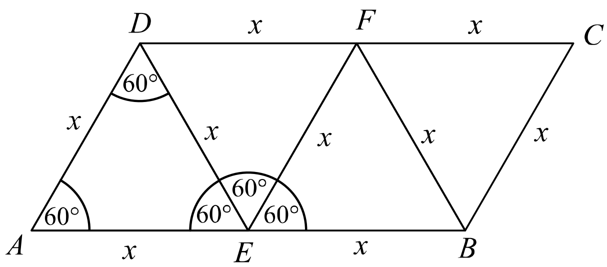
1. Cicafalván az a szokás, hogy minden elsős kisgyerek kap egy kiscicát, amelyről gondoskodnia kell. Idén csak cirmos és fekete kiscicák érkeztek az iskolába, összesen 31 cica. A cicák egyesével olyan dobozokban vannak, ami nem átlátszó, bele kell kukucskálni, hogy lássuk a cica színét, a nyakörvéről pedig a neme is megállapítható: piros a nőstényeké, kék a kandúroké. 19 cirmos cica és 17 nőstény várja a kis gazdikat. Tudjuk még, hogy a cirmosok közül 5 kandúr.
a) Hány fekete kandúr van a dobozokban?
b) Géza és Gerzson ikrek, akik azonos nemű, de különböző színű cicákat szeretnének. Ha ők kezdik a választást, legalább hány dobozt kell kiválasztaniuk, hogy kukucskálás nélkül is biztosak legyenek abban, hogy valamelyik két kiválasztott dobozban van két megfelelő cica?

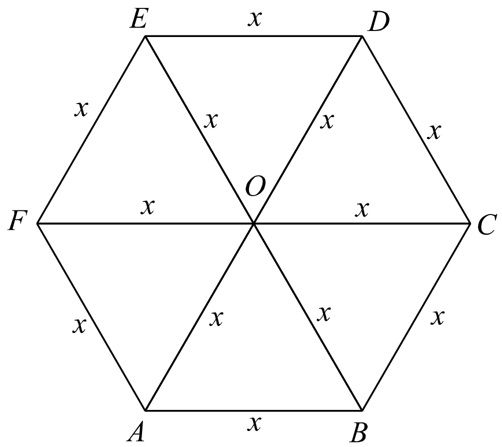
Megoldás:

a) Ha 17 nőstény cica van, akkor a kandúrok száma $31-17=14$.	1 pont
A kandúrok közül 5 cirmos, ezért $14-5=9$ a fekete kandúrok száma.	1 pont
b) A 19 cirmos cica közül 5 kandúr, tehát $19-5=14$ cirmos nőstény cica van.	1 pont
A 17 nőstény közül 14 cirmos, tehát $17-14=3$ fekete nőstény cica van.	1 pont
Az ikrek két esetben nem járnak sikerrel: ha mindegyik kiválasztott dobozban fekete kandúr vagy cirmos nőstény van, vagy ha mindegyik kiválasztott dobozban fekete nőstény vagy cirmos kandúr van.	2 pont
Az első esetben a kiválasztott dobozok száma legfeljebb $9+14=23$,	1 pont
a második esetben pedig $3+5=8$.	1 pont
Ezek szerint 23 doboz esetén még nem biztos, hogy sikerrel járnak, de 24 dobozt kiválasztva egyik kedvezőtlen eset sem fordulhat elő.	1 pont
Legalább 24 dobozt kell kiválasztaniuk.	1 pont
Összesen:	10 pont

2. Egy 8 cm^2 területű paralelogramma oldalainak aránya $1:2$, és egyik belső szöge 60 fokos. Hány négyzetcentiméter a paralelogrammával egyenlő kerületű szabályos hatszög területe?

Megoldás:





Készítsünk ábrát, és használjuk az ábra jelöléseit.	1 pont
Legyenek AB és CD szakaszok felezőpontjai rendre E és F, ekkor $AE = EB = BC = CF = FD = DA = x$. Az EF szakasz a paralelogramma egyik középvonala, ezért $EF = AD = x$, így az $AEFD$ négyszög minden oldala egyenlő hosszú, vagyis ez a négyszög rombusz. Hasonlóan az $EBCF$ négyszög is rombusz.	1 pont
Az AED háromszög egyenlő szárú, mert $AE = AD = x$, ezért alapon fekvő szögei egyenlőek: $AED\sphericalangle = ADE\sphericalangle = \frac{180°-60°}{2} = 60°$. Ez azt jelenti, hogy az AED háromszög szabályos, tehát $ED = x$.	1 pont

A DEF háromszög mindegyik oldalának hossza x, ezért ez a háromszög is szabályos, és egybevágó az AED háromszöggel. A szabályos háromszögek mindegyik belső szöge

60 fokos, ezért $BEF\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$, így az EBF háromszög az AED háromszögnél leírt gondolatmenet alapján szabályos, tehát $BF = x$. Ekkor viszont a BCF háromszög mindegyik oldala x hosszúságú, így ez a háromszög is szabályos. 1 pont

A paralelogrammát 4 darab egybevágó háromszögre bontottuk, ezért egy ilyen háromszög területe negyede a paralelogramma területének, azaz $8 : 4 = 2\ \text{cm}^2$. 1 pont

Az $ABCD$ paralelogramma kerülete $6x$, ezért az azzal egyenlő kerületű $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalainak hossza x. 1 pont

A szabályos hatszög egy oldalához tartozó középponti szög $360° : 6 = 60°$, 1 pont

ezért 6 darab x oldalú szabályos háromszöget az ábrán látható módon elhelyezve kapjuk meg a feladat feltételeinek megfelelő $ABCDEF$ szabályos hatszöget. 1 pont

Egy szabályos háromszög területe $2\ \text{cm}^2$, ezért az $ABCDEF$ hatszög területe $6 \cdot 2 = 12\ \text{cm}^2$. 2 pont

Összesen: 10 pont

3. Egy számsorozat első tagja 2024, második tagja pedig egy x pozitív egész szám. A sorozat bármely három egymást követő tagjára igaz, hogy a középső tag egyenlő két szomszédjának szorzatával. A sorozat első négy tagjának szorzata $\frac{11}{46}$.

a) Mennyi az x értéke?

b) Mennyi a sorozat első 2024 tagjának szorzata?

Megoldás:

a) Ha a sorozat három egymást követő tagja a; b és c, akkor $a \cdot c = b$, tehát $c = \frac{b}{a}$.

Szavakkal megfogalmazva ez azt jelenti, hogy a harmadiktól kezdve a sorozat egy tagját megkapom, ha az előző tagot elosztom az azt megelőzővel. 1 pont

Ezek szerint a sorozat első négy tagja 2024; x; $\frac{x}{2024}$; $\frac{1}{2024}$; 1 pont

ezért az első négy tag szorzata $\frac{2024 \cdot x^2}{2024^2} = \frac{x^2}{2024}$. 1 pont

A feladat feltételei miatt $\frac{x^2}{2024} = \frac{11}{46}$, tehát $x^2 = \frac{2024 \cdot 11}{46} = \frac{2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 11}{2 \cdot 23} = (2 \cdot 11)^2$,

vagyis a sorozat második tagja $x = 22$. 1 pont

b) A sorozat első néhány tagja tehát:

$2024;\ 22;\ \frac{22}{2024};\ \frac{1}{2024};\ \frac{1}{22};\ \frac{2024}{22};\ 2024;\ 22;\ \ldots$ 1 pont

A sorozat egy tagját meghatározza az előző két tag, a hetedik tag egyenlő az elsővel, a nyolcadik a másodikkal, ezért a sorozat tagjai hatosával ismétlődnek. 1 pont

Egy perióduson belül mindegyik tagnak a reciproka is megtalálható, ezért az ismétlődő hat tag szorzata 1. 1 pont

A 2022 páros szám és számjegyeinek összege osztható 3-mal, ezért a 2022 osztható 6-tal. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy az első 2022 tag szorzata 1. 1 pont

Ez követően kezdődik egy új periódus, tehát a 2023. tag 2024, a 2024. tag 22, ezek szorzata 44528, ezért a sorozat első 2024 tagjának szorzata is 44528. 1 pont

Összesen: 10 pont

4. Nevezzük idei számoknak azokat a legalább négyjegyű számokat, amelyeknek utolsó négy számjegyéből alkotott négyjegyű szám 2024. (Ilyen szám például az 1372024.)

a) Mennyi lehet egy 23-mal osztható hatjegyű idei szám első két számjegye?

b) Bizonyítsd be, hogy az idei számok között nincs négyzetszám!

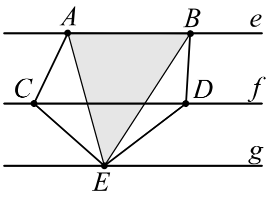
Megoldás:

a) Legyen az első két számjegy a és b, ekkor a keresett hatjegyű szám
$\overline{ab2024} = \overline{ab0000} + 2024 = 10000 \cdot \overline{ab} + 2024$. 1 pont
A 2024 prímtényezős felbontása $2^3 \cdot 11 \cdot 23$, ezért a 2024 osztható 23-mal, 1 pont
tehát $10000 \cdot \overline{ab}$ is osztható 23-mal. A 23 prímszám és nem osztója a 10000-nek,
ezért osztója az $\overline{ab}$ kétjegyű számnak. 1 pont
Az $\overline{ab}$ kétjegyű szám, vagyis a 23-mal osztható idei szám első két számjegyéből
alkotott kétjegyű szám lehet 23; 46; 69; 92. 1 pont
b) Az 1000 osztható 8-cal, ezért egy szám akkor osztható 8-cal,
ha az ezres osztási maradéka osztható 8-cal. 1 pont
A 2024-re végződő hatjegyű szám ezres osztási maradéka 24, ami osztható 8-cal,
tehát a vizsgált hatjegyű szám is osztható 8-cal. 1 pont
A 10000 osztható 16-tal, ezért egy szám akkor osztható 16-tal,
ha a tízezres osztási maradéka osztható 16-tal. 1 pont
A 2024-re végződő hatjegyű szám tízezres osztási maradéka 2024,
ami nem osztható 16-tal, tehát a vizsgált hatjegyű sem osztható 16-tal. 1 pont
A vizsgált szám osztható $2^3 = 8$-cal, de nem osztható $2^4 = 16$-tal,
ezért prímtényezős felbontásában a 2 kitevője 3, vagyis páratlan szám. 1 pont
A vizsgált szám nem lehet négyzetszám, mert egy négyzetszám
prímtényezős felbontásában minden prímszám kitevője páros. 1 pont

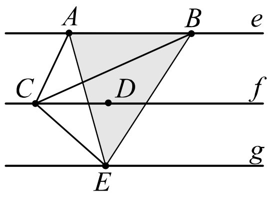
Összesen: 10 pont

5. Adott a síkon három párhuzamos egyenes: *e; f* és *g*. Az *f* egyenes *e* és *g* között helyezkedik el. Az *e* egyenesen felvettük *A* és *B* pontokat, az *f* egyenesen *C* és *D* pontokat, a *g* egyenesen pedig az *E* pontot úgy, hogy semelyik három pont ne illeszkedjen egy egyenesre. Hány különböző négyszöget lehet megrajzolni, ha a négyszögek csúcsai az *A*; *B*; *C*; *D* és *E* pontok közül kerülnek ki?

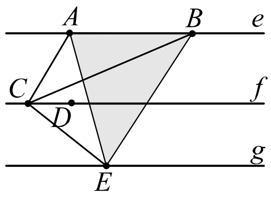
Megoldás:



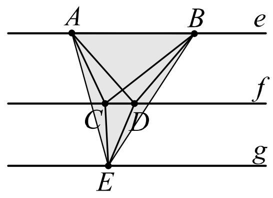
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Készítsünk ábrát! Nevezzük az e egyenest felsőnek, a g egyenest alsónak. 1 pont
Egy négyszöghöz 4 pontot kell kiválasztanunk az 5 közül. Ha a 4 pont úgy helyezkedik el, hogy egy konvex négyszöget alkotnak, akkor ezek csak ezt az egy darab konvex négyszöget határozzák meg. Ilyen pontok például az 1. ábrán *A*; *B*; *C* és *D*;
az ezek által meghatározott négyszög az *ABDC* trapéz. 1 pont
Ha a 4 pont úgy helyezkedik el, hogy az egyik pont a másik három által meghatározott háromszög belsejében van, mint például a 2. ábrán *A*; *B*; *D* és *E*; akkor a belső pontot össze kell kötni a háromszög valamelyik két csúcsával, és hozzávenni a háromszög harmadik csúcsából induló oldalakat. Ezt háromféleképpen tehetjük meg, így három konkáv négyszöget kapunk, példánkban ezek a négyszögek: *AEBD*; *ADEB*; *AEDB*.
A megoldások száma a pontok elhelyezkedésétől függ. 1 pont
Vizsgáljuk az eseteket aszerint, hogy az *f* egyenesre illeszkedő pontok
hogyan helyezkednek el *AE*, illetve *BE* szakaszokhoz képest. 1 pont
Az első esetben a *C* pont *AE*-től balra, *D* pedig *BE*-től jobbra helyezkedik el (lásd 1. ábra).
Ekkor *ACEDB* egy konvex ötszög, ezért ennek bármelyik csúcsát hagyjuk is el, a többi négy pont konvex négyszöget alkot. 5-féleképpen választhatjuk ki az elhagyott pontot, és mindegyik így kapott pontnégyes esetén 1 négyszöget kapunk,
ezért ebben az esetben a kapott négyszögek száma 5. 1 pont

A második esetben a C pont AE-től balra, D pedig AE és BE között helyezkedik el (lásd 2. ábra). Ekkor B, D vagy E pontokat elhagyva 1-1 négyszöget kapunk, Az A pontot elhagyva D pont az BCE háromszög belsejében lesz, ekkor 3 négyszög adódik. A C pontot elhagyva D pont az AEB háromszög belsejében lesz, ami 3 négyszöget eredményez. Ebben az elrendezésben a négyszögek száma $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$.
A szimmetriaokok miatt ugyanennyi négyszög van, ha C pont van AE és BE között, és D a BE-től jobbra. 1 pont

A harmadik esetben C és D pont is AE-től balra helyezkedik el (lásd 3. ábra). Ekkor C, D és E pontok elhagyása esetén 1-1 darab, A és B elhagyása esetén pedig 3-3 darab négyszöget kapunk, tehát a négyszögek száma ekkor is $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$.
Ugyanennyi négyszög keletkezik, ha C és D pont is BE-től jobbra található. 1 pont

A negyedik esetben C és D pont is AE és BE között helyezkedik el (lásd 4. ábra). Ekkor A; B; C; D pontok elhagyása esetén 3-3 darab, E pont elhagyása esetén 1 darab négyszög rajzolható, vagyis a négyszögek száma ekkor $4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 13$. 1 pont

A pontok elhelyezkedésétől függően a rajzolható négyszögek száma 5; 9 vagy 13. 2 pont

Összesen: 10 pont

* * * * *

Több megoldásból csak egy kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.
A dolgozatok pontszámai 2024. március 26-án kerülnek fel a www.mategye.hu honlapra. A versenyzők a saját pontszámukat (a feladatlapon lévő számmal), az iskolák a tanulóik pontszámát (az iskolai kódszámmal és jelszóval) tekinthetik meg. A pontszámokkal kapcsolatban 2024. március 28-án 14 óráig lehet reklamálni a Mategye Alapítvány címére küldött e-mailben (mategye@mategye.t-online.hu). Az eredményhirdetésre meghívott tanulók névsora 2024. április 1-től lesz látható.

Kecskemét, 2024. március 5.

A Szervezőbizottság