7. osztály, 2. kategória

1. A 7.B osztály négy napos kerékpártúrára indult. Az első napon az egész túrára tervezett út egyhatod részét, a második napon a hátralévő út kétötöd részénél 3 kilométerrel többet tettek meg. A harmadik napra háromszor akkora távot terveztek, mint a negyedikre. A harmadik napon azonban sokan defektet kaptak, így az aznapra tervezett útnál 27 kilométerrel kevesebbet tettek meg. A negyedik napon célba értek, így végül a harmadik és negyedik napon megtett utak aránya 3:7 lett.
a) Hány kilométer hosszú volt a kerékpártúra?
b) Melyik napon hány kilométert kerékpároztak?

Első megoldás:

Gondolkodjunk visszafelé, nézzük először az utolsó két napra tervezett távot.

A harmadik napon ennek a távnak a $\frac{3}{4}$ részét tervezték, de csak a $\frac{3}{10}$ részét tették meg, 1 pont

vagyis $\frac{3}{4}-\frac{3}{10}=\frac{15-6}{20}=\frac{9}{20}$ résszel kevesebbet. 1 pont

Ha az utolsó két napra tervezett táv $\frac{9}{20}$ része 27 km, akkor $\frac{1}{20}$ része 3 km,

ezért az utolsó két napra tervezett és megtett táv 60 km. 1 pont

A második napon az első nap után megmaradó út $\frac{2}{5}$ részénél 3 kilométerrel többet

tettek meg, ezért az utolsó két napra első nap után megmaradó út $\frac{3}{5}$ részénél

3 kilométerrel kevesebb, 60 km maradt. 1 pont

Az első nap után megmaradó út $\frac{3}{5}$ része tehát 63 km, ezért $\frac{1}{5}$ része 21 km,

vagyis az első nap után megmaradó út 105 km. 1 pont

Az első napon az egész túrára tervezett út $\frac{1}{6}$ részét tették meg, így $\frac{5}{6}$ része maradt. 1 pont

Ha az $\frac{5}{6}$ rész 105 km, akkor az $\frac{1}{6}$ rész 21 km, ezért a teljes táv pedig 126 km. 1 pont

Ellenőrzés: Az első napi táv $126:6=21$ km volt, maradt $126-21=105$ km.
Ennek az egyötöd része $105:5=21$ km, kétötöd része 42 km, vagyis a második napi táv 45 km volt, maradt $105-45=60$ km. Ezt 3:1 arányban tervezték felosztani, vagyis a harmadik napra 45 km, a negyedikre 15 km jutott volna. De harmadik napon ennél 27 kilométerrel kevesebbet, azaz 18 kilométert tettek meg, a negyediken pedig a tervezettnél 27 kilométerrel többet, azaz 42 kilométert. Mivel $18=6\cdot 3$ és $42=6\cdot 7$, ezért az utolsó két napi távok aránya valóban 3:7. 1 pont

A túra hossza 126 km, 1 pont

az egyes napokon megtett távok sorrendben 21 km; 45 km; 18 km; 42 km. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Az első napon az egész túrára tervezett út $\frac{1}{6}$ részét tették meg, így $\frac{5}{6}$ része maradt.

Ennek a $\frac{2}{5}$ része az egész táv $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{6}$ része, 1 pont

az első nap megtett úttal együtt ez a teljes táv $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$ része, vagyis fele.

Az első két napon tehát összesen a táv felénél 3 kilométerrel többet tettek meg. 1 pont

Legyen az utolsó két napon megtett út hosszának tizedrésze x,
ekkor a ténylegesen megtett táv a harmadik napon $3x$, a negyediken $7x$. 1 pont

A harmadik napra tervezett táv $3x+27$, a negyedikre tervezett táv $7x-27$. 1 pont

A harmadik napra háromszor akkora utat terveztek, mint a negyedikre,
ezért felírható a következő egyenlet: $3\cdot(7x-27)=3x+27$. 1 pont

A zárójelek felbontása után az kapjuk, hogy $21x-81=3x+27$.

Az egyenletet rendezve $18x = 108$ adódik, ahonnan $x = 6$. 1 pont

Az utolsó két nap 60 km utat tettek meg, ez a táv felénél 3 kilométerrel kevesebb, vagyis a teljes táv $(60+3)\cdot 2 = 126$ km. 1 pont

Ellenőrzés: Az első napi táv $126:6 = 21$ km volt, maradt $126-21 = 105$ km. Ennek az egyötöd része $105:5 = 21$ km, kétötöd része 42 km, vagyis a második napi táv 45 km volt, maradt $105-45 = 60$ km. Ezt 3:1 arányban tervezték felosztani, vagyis a harmadik napra 45 km, a negyedikre 15 km jutott volna. De harmadik napon ennél 27 kilométerrel kevesebbet, azaz 18 kilométert tettek meg, a negyediken pedig a tervezettnél 27 kilométerrel többet, azaz 42 kilométert. Mivel $18 = 6\cdot 3$ és $42 = 6\cdot 7$, ezért az utolsó két napi távok aránya valóban 3:7. 1 pont

A túra hossza 126 km, 1 pont

az egyes napokon megtett távok sorrendben 21 km; 45 km; 18 km; 42 km. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Erik nehezen kel fel, ezért öt ébresztést állít be a telefonján. Az elsőt 7:00-re, majd 7:01-re, 7:03-ra, 7:09-re és 7:27-re. Erik minden ébresztés alkalmával a “Szundi” gombot nyomja meg. Hány egész perccel 7 óra után fordul elő utoljára, hogy nem ébreszt a telefon, ha a telefon a „Szundi” gomb megnyomása után…

a) 5 perccel újra ébreszteni fog?

b) 10 perccel újra ébreszteni fog?

Megoldás:

a) Tekintsük a 7 óra után eltelt időt percekben. 7:00-kor ébreszt a telefon, így minden 5-tel osztható percben ébreszteni fog. 1 pont

7 óra 1 perckor ébreszt a telefon, emiatt az összes olyan percben ébreszt, ami 1-re, vagy 6-ra végződik. 1 pont

A 7:03-as ébresztés miatt a 3-ra és a 8-ra végződő percekben is ébreszt a telefon, a 7:09-es miatt a 4-re és a 9-re végződő, és hasonlóan kapjuk, hogy 7:27 után a 2-re és 7-re végződő percekben is lesz ébresztés. 1 pont

A 27. perctől már minden egész percben megszólal az óra. 1 pont

7:22-kor, vagyis 22 perccel 7 óra után fordul elő utoljára, hogy nem ébreszt a telefon. 2 pont

b) A 7:00 órás ébresztés miatt a 0-ra végződő percekben is ébreszt az óra. 1 pont

Ha megint csak a 7 óra után eltelt perceket nézzük, akkor az Erik által előre beállított ébresztések egyike sem végződik 2; 4; 5; 6; 8 számjegyekre. Ekkor viszont később sem fordulhatnak elő a felsorolt végződések, hiszen ha egy számot 10-zel növelünk, akkor az utolsó számjegye nem változik. 2 pont

Nincs olyan időpont, amitől kezdve minden egész percben ébreszt Erik telefonja. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Egy 27 fős osztály cukrászdába készül, ahol csak háromféle fagylaltot árulnak. Minden tanuló egyforma mennyiségű fagylaltot fog kapni, viszont a gyerekek választhatják ki, hogy milyen ízeket szeretnének a kehelybe. A cukrászdához csak az alábbi információ jutott el a gyerekek igényeiről: 15 olyan diák volt, aki kért pisztáciát, 16 olyan, aki kért gesztenyét, és 12 olyan, aki kért áfonyát. Pontosan kétféle fagylaltot 10 diák kért. 7-en voltak azok, akik kértek gesztenyét és áfonyát is.

a) Hányan kértek olyan kelyhet, amely mind a három ízt tartalmazza?

b) Ha egy diák két fajtából kért, akkor a kehely fele-fele arányban tartalmaz a két ízből, ha három fajtából kért, akkor harmad-harmad arányban tartalmaz mindhárom ízből. Hány kelyhet tudnak a fenti információk alapján előre elkészíteni?

Megoldás:

a) Ha összeadjuk a pisztáciát, gesztenyét és áfonyát igénylők számát, akkor bizonyos diákokat többször vettünk figyelembe: $15+16+12 = 43$. 1 pont

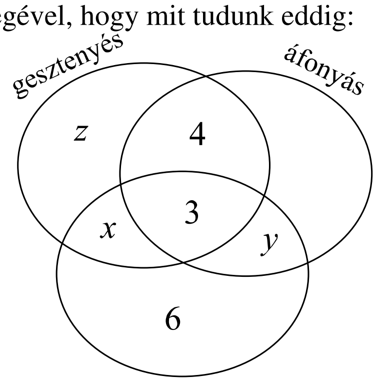
Ha az összegből kivonjuk azon diákok számát, akik pontosan kétfélét kértek, akkor az így kapott eredményben egyszer számoltuk azokat a diákokat, akik pontosan egyféle ízt rendeltek, és azokat is, akik pontosan kétféle ízből kértek, hiszen a kétféle ízből kérőket a kivonást megelőzően kétszer számoltuk: $43-10 = 33$. 1 pont

A mindhárom ízből kérőket viszont még mindig háromszor számoltuk, hiszen minden íznél egyszer megszámoltuk őket, és nem vontuk le őket az előző lépésben. A három ízből kérők számának eddigi helytelen kezelése okozza a 33 és a 27 közötti eltérést. Őket is pontosan egyszer kell számolnunk, ezért az eltérés 6, ami az ő számuknak a kétszerese. 3 olyan ember van, aki mind a három ízből kért a kelyhébe. 2 pont

b) Összesen 7 olyan ember volt, aki gesztenyét és áfonyát is rendelt, és ebből 3 olyan, aki mind a 3 ízt, így a gesztenye-áfonya kelyhet kérők száma 4.
Jelölje x a csak gesztenye-pisztáciát, y a csak áfonya-pisztáciát, és z a csak gesztenyét kérő diákok számát. A pontosan két ízt rendelők száma 10, ezért $x+y=10-4=6$. 1 pont

A pisztáciát rendelők száma 15. Ebből viszont következik, hogy a csak pisztáciát rendelők száma $15-(x+y+3)=15-9=6$. 1 pont

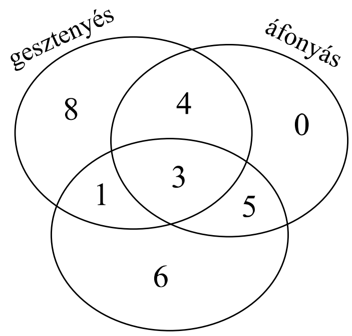
Ábrázoljuk Venn-diagram segítségével, hogy mit tudunk eddig:

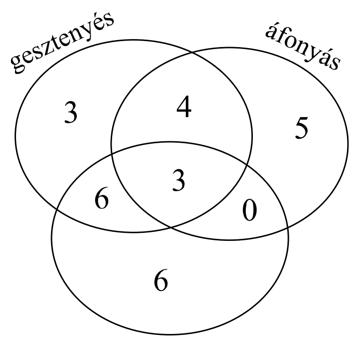


Az x és y nem negatív egész számok, és az összegük 6. Áfonyás fagyit 12 gyerek kért, ezért $7+y\le 12$, tehát $y\le 5$. Ezek szerint x értéke legalább 1 és legfeljebb 6. 1 pont

16 gyerek kért gesztenyét, és x értéke legfeljebb 6, ezért legalább 3 olyan diák volt, aki csak gesztenye ízű fagyit kért. A z értéke legalább 3. 1 pont

Áfonya és áfonya-pisztácia kelyhet nem lehet előre elkészíteni, mert ahogy az alábbi két ábrán látható, elképzelhető, hogy az egyik feléből egyetlen darabra sincs igény.





1 pont

Összesen 17 olyan kehely van, amely előre elkészíthető: 3 gesztenye, 6 pisztácia, 1 gesztenye-pisztácia, 4 gesztenye-áfonya és 3 gesztenye-áfonya-pisztácia. 1 pont

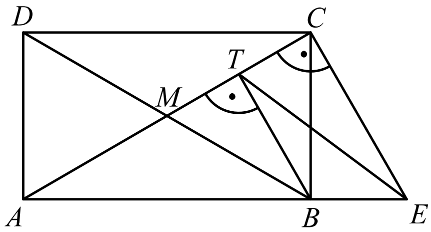
---

Összesen: 10 pont

7. osztály, 2. kategória

4. Az $ABCD$ téglalap átlói a belső szögeket 1:2 arányban osztják. A B csúcsból az AC átlóra bocsátott merőleges talppontja a T pont. Az AB oldal B-n túli meghosszabbításán úgy vettük fel az E pontot, hogy az AC és a CE szakaszok merőlegesek legyenek egymásra. Hány négyzetcentiméter a BET háromszög területe, ha az $ABCD$ téglalap területe 1200 cm^2?

Megoldás:



Készítsünk ábrát, és használjuk az ábra jelöléseit. 1 pont

Két esetet kell vizsgálnunk, attól függően, hogy az AB oldal a téglalap hosszabb vagy rövidebb oldala. Mindkét esetben igaz, hogy az átló a derékszögeket 1:2 arányban, vagyis 30°-os és 60°-os szögekre osztja. 1 pont

Először nézzük az ábrán látható esetet, ahol AB a hosszabbik oldal.

Az $MBC\sphericalangle = MCB\sphericalangle = 60°$, ezért az MBC háromszög szabályos. A BT szakasz az MBC háromszög szimmetriatengelye, ezért azt két egybevágó, egyenlő területű részre osztja. 1 pont

Az AC átló felezi a téglalap területét, ezért az ABC háromszög területe 600 cm^2.

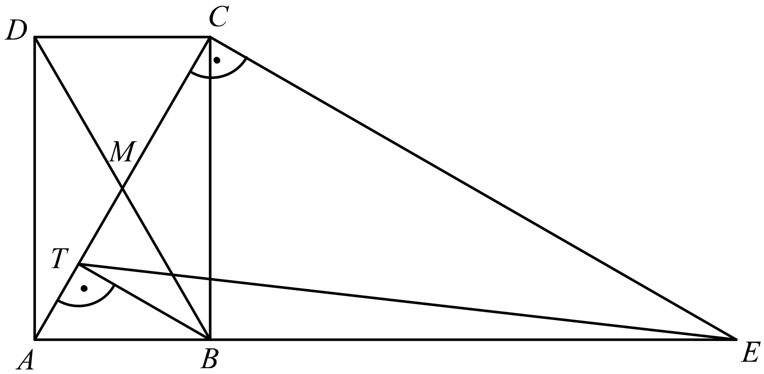
A BM szakasz az ABC háromszög súlyvonala, ezért felezi a háromszög területét, tehát az MBC háromszög területe 300 cm^2, így a TBC háromszög területe 150 cm^2. 1 pont

A BET háromszög területe egynlő a TBC háromszög területével, hiszen mindkét háromszög egyik oldala TB, és mivel TB és CE is merőleges AC-re, ezért TB párhuzamos CE-vel, így a két háromszög TB oldalhoz tartozó magassága is egyenlő. 1 pont

Ebben az esetben tehát a BET háromszög területe 150 cm^2. 1 pont

Nézzük most az az esetet, amikor az AB a téglalap rövidebb oldala.

Készítsünk ehhez az esethez is egy ábrát. 1 pont



Ebben az esetben az ABM háromszög szabályos, melynek a területét a BT szakasz felezi.

Az ABM háromszög területe 300 cm^2, ezért az ABT háromszög területe 150 cm^2, tehát a TBC háromszög területe $600 - 150 = 450\,\text{cm}^2$. 1 pont

Az előző esethez hasonlóan indokolható, hogy a BET háromszög területe egyenlő a TBC háromszög területével, tehát a BET háromszög területe 450 cm^2. 1 pont

A BET háromszög területe 150 cm^2 vagy 450 cm^2 lehet. 1 pont

---

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Ha a versenyző csak az egyik esetet vizsgálja, akkor függetlenül attól, hogy melyik esettel teszi meg ezt, legfeljebb 6 pontot kaphat.

5. A Vörös Ördögök 8 mérkőzést játszanak egy bajnokságban. Egy mérkőzés csak győzelemmel vagy vereséggel érhet véget, döntetlen nincs. Az edző a mérkőzések végén értékeli a csapatot, hogy milyen formában játszottak. Ez az értékelés háromféle lehet: jó, átlagos vagy rossz. Mindez független attól, hogy azon a meccsen nyert a csapat, vagy vesztett. A bajnokság első meccsén pontosan akkor nyernek, ha az edző szerint jó formában játszanak. A későbbi mérkőzéseken pontosan akkor győznek, ha az előző meccsen veszítettek, és már játszottak az edző szerint jó formában a bajnokság során.
a) Hányféle lehet a csapat győzelem-vereség sorozata, ha az utolsó mérkőzésüket megnyerték?
b) Hányféleképpen alakulhatott a csapat formája a bajnokság során, ha az utolsó mérkőzést megnyerték?

Megoldás:

a) Ha az utolsó meccset megnyerték, akkor az utolsó előttin kikaptak,	
és az első 7 meccs valamelyikén jó formában játszottak.	1 pont
Nem lehetett két győztes meccs egymás után, hiszen az egyik feltétele a győzelemnek az,	
hogy az előző meccsen kikaptak.	1 pont
Az sem lehet, hogy két győztes meccs között több, mint 1 vereség legyen,	
mivel a két győztes meccs közül az elsőt megelőző valamelyik meccsen jó formában voltak.	
Ha a következő meccsen kikaptak, akkor utána nyerniük kellett,	
hiszen az előző meccsen vesztettek, és voltak már jó formában.	1 pont
Ez az jelenti, hogy az első győzelem már meghatározza a teljes győzelem-vereség	
sorozatot: ha egyszer nyertek, akkor utána már felváltva következnek	
a vereségek és a győzelmek. A nyolcadik mérkőzésen nyertek,	
ezért az első győzelemnek páros sorszámú meccsen kellett történnie.	1 pont
A második mérkőzést nem nyerhették meg, mert akkor az elsőn úgy vesztettek volna,	
hogy közben jó formában játszottak, ami nem felel meg a feladat feltételeinek.	1 pont
Három megfelelő győzelem-vereség sorozat van, attól függően,	
hogy először a negyedik, a hatodik vagy a nyolcadik mérkőzést nyerték-e meg.	1 pont
b) Az a) kérdésre adott válaszból kiderül, hogy három esetet kell vizsgálnunk.	
Ha a negyedik meccsen nyertek először, akkor a harmadikon jó formában játszottak.	
Az első két meccsen viszont rossz vagy átlagos formában voltak,	
mert ha bármelyik vesztes meccsen jó formában lettek volna,	
akkor a következő meccsüket megnyerik. Ezek szerint az első két meccsen 2-féle,	
a harmadikon 1-féle, az utolsó öt meccsen pedig 3-féle formában játszhattak,	
ezért a lehetőségek száma $2^2 \cdot 1 \cdot 3^5 = 972$.	1 pont
A másik két esetben is kihasználhatjuk azt, amit az előző esetben megállapítottunk,	
vagyis hogy az első győzelmet megelőző meccsen jó formában játszott a csapat,	
azt megelőzően rosszban vagy átlagosban, a győztes meccstől kezdődően pedig	
jóban, rosszban vagy átlagosban. Ha a hatodik meccset nyerték meg először,	
akkor $2^4 \cdot 1 \cdot 3^3 = 432$ lehetőség van,	1 pont
ha pedig a nyolcadikat, akkor a lehetőségek száma $2^6 \cdot 1 \cdot 3 = 192$.	1 pont
A csapat formája $972 + 432 + 192 = 1596$ különböző módon alakulhatott.	1 pont
Összesen:	10 pont

* * * * *

Több megoldásból csak egy kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.
A dolgozatok pontszámai 2024. március 26-án kerülnek fel a www.mategye.hu honlapra. A versenyzők a saját pontszámukat (a feladatlapon lévő számmal), az iskolák a tanulóik pontszámát (az iskolai kódszámmal és jelszóval) tekinthetik meg. A pontszámokkal kapcsolatban 2024. március 28-án 14 óráig lehet reklamálni a Mategye Alapítvány címére küldött e-mailben (mategye@mategye.t-online.hu). Az eredményhirdetésre meghívott tanulók névsora 2024. április 1-től lesz látható.

Kecskemét, 2024. március 5.

A Szervezőbizottság