8. osztály, 1. kategória

1. Három pozitív egész szám összegének hatszorosa egyenlő a három szám szorzatával. Melyik lehet ez a három szám, ha az egyik szám egyenlő a másik kettő összegével?

Megoldás:

Legyen a három szám $0 < a \le b \le c$, amelyekre teljesül az $a \cdot b \cdot c = 6 \cdot (a+b+c)$ egyenlet. 1 pont

A feladat feltételei alapján $c = a+b$, ezt a fenti egyenletbe helyettesítve 1 pont

$a \cdot b \cdot c = 6 \cdot ((a+b)+c) = 6 \cdot (c+c) = 6 \cdot 2 \cdot c = 12 \cdot c.$ 1 pont

Azt kaptuk, hogy $a \cdot b \cdot c = 12 \cdot c$. Az egyenlet mindkét oldalát osztva a c pozitív számmal

$a \cdot b = 12.$ 1 pont

A megfelelő $(a;b)$ számpárok a következők: (1;12); (2;6) és (3;4). 3 pont

A harmadik szám, a c értéke rendre 13; 8 és 7. 1 pont

Ellenőrzés: $1 \cdot 12 \cdot 13 = 156$ és $6 \cdot (1+12+13) = 6 \cdot 26 = 156$; $2 \cdot 6 \cdot 8 = 96$ és $6 \cdot (2+6+8) = 6 \cdot 16 = 96$; $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ és $6 \cdot (3+4+7) = 6 \cdot 14 = 84$. 1 pont

A keresett három szám lehet 1; 12; 13 vagy 2; 6; 8 vagy 3; 4; 7. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Leírjuk a VARGA szó betűinek minden lehetséges sorrendjét, és az így kapott 5 betűs „szavakat” ábécé sorrendbe szedve egymás után felsoroljuk. Hányadik helyen áll ebben a sorban a VARGA szó?

Első megoldás:

A VARGA szó 4 különböző betűjének ábécé szerinti sorrendje: A, G, R, V. 1 pont

Ha az első betű az A, akkor utána az A; G; R; V betűk $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féle sorrendben állhatnak, tehát 24 szó kezdődik A betűvel. 2 pont

A G betű után álló A, A, R, V betűknek $4 \cdot 3 = 12$-féle lehetséges sorrendje van, mivel az R betűt 4 helyre tehetjük, ezután a V betűnek 3 lehetséges helye van, és a két üresen maradt helyre kell az A betűket tennünk. 2 pont

Az R betűvel kezdődő szavak száma az előbbihez hasonló módon számolva szintén 12. 2 pont

Az A, G vagy R betűkkel kezdődő szavak száma tehát összesen $24 + 12 + 12 = 48$. 1 pont

Ezek után jönnek a V betűvel kezdődő szavak, a következő sorrendben:

VAAGR; VAARG; VAGAR; VAGRA; VARAG és VARGA. 1 pont

A V betűs szavak sorrendjében a 6. szó a VARGA, és $48 + 6 = 54$, ezért az ábécé sorrendben az 54. helyen áll a VARGA szó. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

A VARGA szó 4 különböző betűjének ábécé szerinti sorrendje: A, G, R, V. 1 pont

A G betűt 5 helyre, ezután az R betűt 4 helyre, majd a V betűt 3 helyre írhatjuk, az üresen maradt két helyre kerülnek az A betűk, így a lista összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ szóból áll. 4 pont

A VARGA szó után ábécé sorrendben már csak a következő szavak állnak:

VGAAR; VGARA; VGRAA, VRAAG; VRAGA; VRGAA. 2 pont

Ez 6 darab szó, és $60 - 6 = 54$, 2 pont

ezért az ábécé sorrendben az 54. helyen áll a VARGA szó. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Bence kiválasztott az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számok közül a lehető legtöbbet úgy, hogy a kiválasztott számokból képezhető kéttagú összegek értékei mind különbözőek. Hány számot választott ki Bence?

Megoldás:

Bence ki tudott választani 5 számot, például lehetnek a kiválasztott számok 1; 2; 3; 5 és 8. 2 pont

Ezek a számok megfelelnek a feladat feltételeinek, hiszen $1+2=3$; $1+3=4$; $1+5=6$; $1+8=9$; $2+3=5$; $2+5=7$; $2+8=10$; $3+5=8$; $3+8=11$ és $5+8=13$, vagyis a tíz összeg értékei mind különbözőek. 1 pont

Bebizonyítjuk, hogy 6 vagy annál több számot nem választhatott ki Bence.

Ha 6 számot választott volna, azokból $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ számpárt lehet képezni. 1 pont

A lehetséges legkisebb összeg a 3, a legnagyobb összeg a 17, így az összegeknek legfeljebb 15-féle különböző értéke lehet. 1 pont

Ezért csak úgy lehet mindegyik számpár esetén különböző a számok összege, ha mind a 15 lehetséges összeg előfordulna, tehát a kéttagú összegek értékei 3; 4; 5; …; 16 és 17. 1 pont

A 3 és a 17 előállítására csak egy-egy lehetőség van: $3=1+2$ és $17=8+9$, ezért az 1; 2; 8 és 9 biztosan a hat kiválasztott szám között van. 2 pont

Azonban $1+9=2+8$, tehát ekkor nem teljesülne az a feltétel, hogy a páronkénti összegek mind különbözők. 1 pont

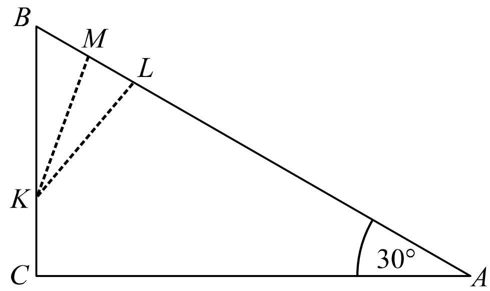
Bence 5 számot választott ki. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

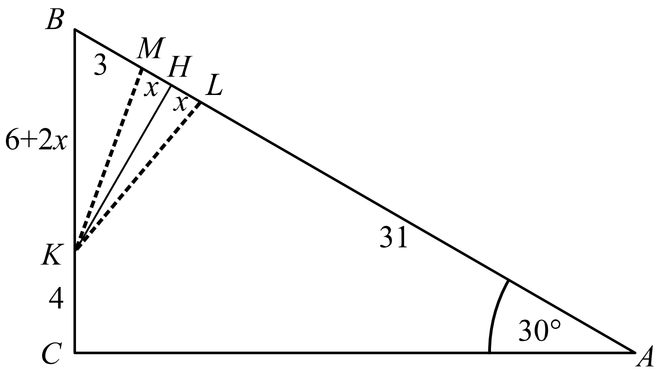
Ha a versenyző megad 4 számot, amelyeknél a páronkénti összegek különbözők, majd elvégzi az ellenőrzést, és azt állítja, hogy 4-nél több szám nem választható, arra legfeljebb 2 pont adható.

4. Az ABC derékszögű háromszögben $CAB\sphericalangle=30°$. Az ábrán látható módon felvettük a BC befogón a K pontot, az AB átfogón pedig az M és L pontokat úgy, hogy $KL=KM$, $CK=4\,\text{cm}$, $AL=31\,\text{cm}$ és $BM=3\,\text{cm}$.
Milyen hosszú az LM szakasz?



Megoldás:

Készítsünk ábrát, és használjuk az ábra jelöléseit!



Legyen a K pontból az AB átfogóra állított merőleges talppontja a H pont. 1 pont

A megoldás során többször felhasználjuk, hogy ha egy derékszögű háromszög hegyesszögeinek nagysága 30° és 60°, akkor ebben a félszabályos háromszögben a 30°-os szöggel szemközti befogó hossza fele az átfogó hosszának. 1 pont

A *KH* szakasz a *KLM* egyenlő szárú háromszög magassága, ezért felezi az *LM* alapot, legyen $MH = HL = x$. 1 pont

A *BHK* félszabályos háromszög, mert a *B* csúcsnál lévő belső szögének nagysága 60°, ezért átfogója kétszerese a *BH* befogónak: $BK = 2\cdot(3+x) = 6+2x$. 2 pont

Az *ABC* háromszög átfogója $AB = 31 + x + x + 3 = 34 + 2x$. 1 pont

Az *ABC* félszabályos háromszög, ezért átfogójának hosszára az is teljesül, hogy

$$AB = 2\cdot BC = 2\cdot(6+2x+4) = 2\cdot(10+2x) = 20+4x.$$ 1 pont

Az *AB* átfogó hosszára felírható a következő egyenlet:

$$20+4x = 34+2x.$$ 1 pont

Az egyenlet mindkét oldalából 20-at és $2x$-et kivonva

$$2x = 14.$$ 1 pont

Az *LM* szakasz hossza 14 cm. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Hány olyan 2024-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely relatív prím a 2024-hez? (Két szám relatív prím egymáshoz, ha nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk.)

Első megoldás:

Mivel $2024 = 2^3\cdot 11\cdot 23$, ezért azokat a 2024-nél kisebb pozitív egész számokat keressük, amelyek nem oszthatók a 2; 11 és 23 prímszámok egyikével sem. 1 pont

2-vel, 11-gyel és 23-mal azok a számok oszthatók, amelyek oszthatók ezen prímszámok szorzatával, vagyis $2\cdot 11\cdot 23 = 506$-tal. Ilyen szám $2024:506 = 4$ van. 1 pont

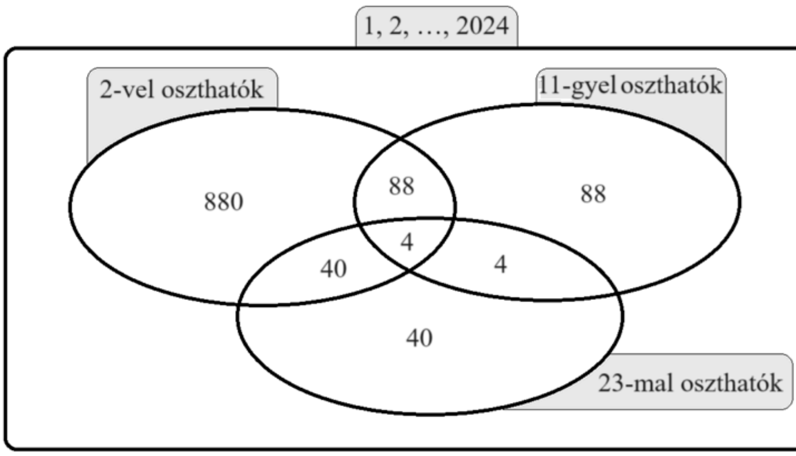
2-vel és 11-gyel osztható $2024:22 = 92$ szám, ezek közül 4 osztható 23-mal is, így $92-4 = 88$ szám osztható csak 2-vel és 11-gyel. 1 pont

Hasonlóan csak 2-vel és 23-mal osztható $2024:46-4 = 44-4 = 40$ szám, 1 pont

csak 11-gyel és 23-mal osztható $2024:253-4 = 8-4 = 4$ szám. 1 pont

A számok közül $2024:2 = 1012$ osztható 2-vel, de közülük $88+40+4 = 132$ osztható még ezen kívül a 11 és a 23 közül legalább az egyikkel, ezért csak 2-vel $1012-132 = 880$ szám osztható. 1 pont

Hasonlóan számolva, csak 11-gyel osztható $2024:11-(88+4+4) = 184-96 = 88$ szám, és csak 23-mal osztható $2024:23-(40+4+4) = 88-48 = 40$ szám. 1 pont



A 2; 11; 23 számok közül legalább az egyikkel osztható tehát $880+88+88+40+4+4+40 = 1144$ szám, beleértve a 2024-et is. 1 pont

Az 1 és 2024 közti egész számok közül a többi relatív prím a 2024-hez, ezek száma $2024-1144 = 880$. 1 pont

880 olyan 2024-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely relatív prím a 2024-hez. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Mivel $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, ezért azokat a 2024-nél kisebb pozitív egész számokat keressük, amelyek nem oszthatók a 2; 11 és 23 prímszámok egyikével sem. 1 pont

Alkalmazzunk logikai szitát. Az 1; 2; …; 2024 számok közül első lépésben elhagyjuk azokat, melyek oszthatók 2-vel, 11-gyel vagy 23-mal.

1-től 2024-ig $2024 : 2 = 1012$ szám osztható 2-vel, $2024 : 11 = 184$ szám osztható 11-gyel és $2024 : 23 = 88$ szám osztható 23-mal,
ez összesen $1012 + 184 + 88 = 1284$ szám. 3 pont

Ha ezt a számot kivonjuk a 2024-ből, akkor lesznek olyan számok, amelyeket legalább kétszer számoltunk, így legalább kétszer is vontuk ki őket.

Legalább kétszer számoltuk azt a $2024 : 22 = 92$ számot, amelyek oszthatók 2-vel és 11-gyel is, azt a $2024 : 46 = 44$ számot, amelyek oszthatók 2-vel és 23-mal is, és azt a $2024 : 253 = 8$ számot, amelyek oszthatók 11-gyel és 23-mal is.

Összesen $92 + 44 + 8 = 144$ olyan szám volt, amelyet legalább kétszer számoltunk, ezért legalább kétszer vontunk ki. 3 pont

Ha ezt a számot hozzáadjuk a $2024 - 1284$ különbséghez, akkor a 2; 11; 23 számok közül pontosan kettővel osztható számok számát kétszer vontuk ki, de egyszer hozzá is adtuk, tehát ezeknek a számoknak a számát egyszer vontuk ki, ami éppen megfelelő.

$2024 : (2 \cdot 11 \cdot 23) = 2024 : 506 = 4$ olyan szám van, amelyek 2-vel, 11-gyel és 23-mal is oszthatók, ezt a 4 számot 3-szor vontuk ki és 3-szor adtuk hozzá, így az eddig kapott eredményből még ki kell vonnunk 4-et. 1 pont

$2024 - 1284 + 144 - 4 = 880.$ 1 pont

880 olyan 2024-nél kisebb pozitív egész szám van, amely relatív prím a 2024-hez. 1 pont

---

Összesen: 10 pont

* * * * *

Több megoldásból csak egy kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.

A dolgozatok pontszámai 2024. február 13-án kerülnek fel a www.mategye.hu honlapra. A versenyzők a saját pontszámukat (a feladatlapon lévő számmal), az iskolák a tanulóik pontszámát (az iskolai kódszámmal és jelszóval) tekinthetik meg. A pontszámokkal kapcsolatban 2024. február 15-én 14 óráig lehet reklamálni a Mategye Alapítvány címére küldött e-mailben (mategye@mategye.t-online.hu). A döntőbe jutott tanulók névsora és a döntő helyszínei a www.mategye.hu címen 2024. február 19-től lesznek láthatóak, a 3. forduló helyszíneivel együtt.

Kecskemét, 2024. január 23.

A Szervezőbizottság