8. osztály, 2. kategória

1. A táblára felírtam négy egész számot, összegük 44. Ha kiszámoljuk mindegyik számpár esetén a két szám különbségét, akkor az 1; 3; 4; 5; 6 és 9 számokat kapjuk. Melyik számok vannak a táblán?

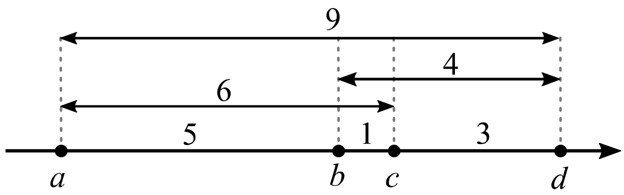
Megoldás:

A négy szám között nincsenek egyenlők, hiszen akkor a különbségek között is lennének egyenlők. Legyen a négy szám $a < b < c < d$. Ekkor $d - a = 9$. 1 pont

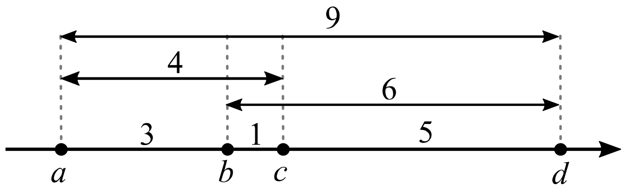
Az a és d közötti részt b és c három részre bontja, ezért $b - a$, $c - b$ és $d - c$ három olyan szám, melyek összege 9. Ez a három különbség csak az 1, a 3 és az 5 lehet, mert csak ennek a három számnak az összegeként lehet előállítani a 9-et. 1 pont

A $c - a = (b - a) + (c - b)$ különbség és a $d - b = (c - b) + (d - c)$ különbség is szerepel a fenti hat szám között, ezért a $c - b$ értéke csak az 1 lehet, mert ha a középső különbség 3 vagy 5 lenne, akkor a $3 + 5 = 8$ is kellene, hogy szerepeljen. 1 pont

Ha $b - a = 5$, akkor $c - a = 6$, $d - c = 3$ és $d - b = 4$.



Ha $b - a = 3$, akkor $c - a = 4$, $d - c = 5$ és $d - b = 6$.



1 pont

Az első esetben $a + (a + 5) + (a + 6) + (a + 9) = 44$, 1 pont

tehát $4a + 20 = 44$, ezért $4a = 24$, így $a = 6$. 1 pont

A táblára írt négy szám ebben az esetben a 6; 11; 12 és 15 volt. 1 pont

A második esetben $a + (a + 3) + (a + 4) + (a + 9) = 44$, 1 pont

tehát $4a + 16 = 44$, ezért $4a = 28$, így $a = 7$. 1 pont

A táblára írt négy szám ebben az esetben a 7; 10; 11 és 16 volt. 1 pont

A táblára írt négy szám vagy a 6; 11; 12; 15; vagy a 7; 10; 11; 16 volt.

Összesen: 10 pont

2. Anna egy 8×8-as sakktáblát feldarabolt téglalapokra úgy, hogy a sakktábla egyik mezőjébe sem vágott bele, és semelyik két téglalap nem volt egybevágó. Mennyi a feldarabolással kapott téglalapok számának lehetséges legnagyobb értéke?

Megoldás:

Soroljuk fel területük nagysága szerint növekvő sorrendben az első 13 olyan téglalapot, melyek elhelyezhetők egy 8×8-as sakktáblán:

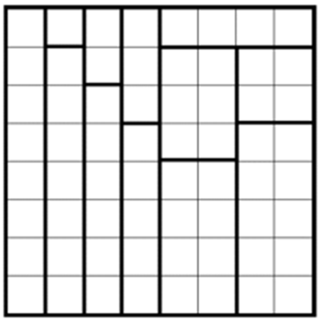
1×1; 1×2; 1×3; 1×4; 2×2; 1×5; 1×6; 2×3; 1×7; 1×8; 2×4; 3×3; 2×5. 2 pont

Ezen téglalapok területeinek az összege 73, ami több, mint a 8×8-as sakktábla területe. 1 pont

Ezért legfeljebb 12 téglalap szerepelhet a feldarabolásban. 2 pont

Ha kihagyjuk a 3×3-as négyzetet, akkor a megmaradt téglalapok területének az összege pontosan 64. Ezzel a tizenkét téglalappal megvalósítható lehet a feldarabolás. 1 pont

A feldarabolás ezekre a téglalapokra elvégezhető, például az ábrán látható módon:



3 pont

Anna feldarabolásában legfeljebb 12 téglalap szerepelhet. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Peti leírt egy olyan háromjegyű pozitív egész számot, amelyben a számjegyek szorzata 30-cal nagyobb a számjegyek összegénél.
a) Bizonyítsd be, hogy Peti olyan számot írt le, amelynek legkisebb számjegye 4-nél kisebb!
b) Hányféle számot írhatott le Peti?

Megoldás:

a) Legyenek a háromjegyű szám számjegyei $a \geq b \geq c$.
Ekkor a felírt számra teljesül, hogy $a+b+c+30=a\cdot b\cdot c$. 1 pont
A számjegyek nem lehetnek nagyobbak 9-nél, ezért $a+b+c+30 \leq 3\cdot 9+30=57$.
Ez viszont azt jelenti, hogy a számjegyek szorzata 57-nél kisebb vagy egyenlő. 1 pont
Ha a legkisebb számjegy legalább 4, akkor mindegyik számjegy legalább 4,
ekkor azonban $a\cdot b\cdot c \geq 4^3=64>57$ lenne, ami nem lehetséges.
A legkisebb számjegy kisebb, mint 4. 1 pont

b) Ha $c=0$, akkor $a+b+c+30=0$, ami nem lehetséges. 1 pont
Ha $c=1$, akkor $a+b+31=a\cdot b$. Végigpróbálva a lehetséges értékeit,
csak akkor lesz b egész, ha $a=9$, ekkor $b=5$. 2 pont
Ha $c=2$, akkor $a+b+32=2\cdot a\cdot b$. Végigpróbálva a lehetséges értékeit,
csak akkor lesz b egész, ha $a=7$, ekkor $b=3$. 2 pont
Ha $c=3$, akkor $a+b+33=3\cdot a\cdot b$. Végigpróbálva a lehetséges értékeit azt kapjuk,
hogy ebben az esetben nincs olyan a számjegy, amelyre b is számjegy lenne. 1 pont
A háromjegyű szám számjegyei 1; 5; 9 vagy 2; 3; 7. A számjegyekből mindkét esetben
6 darab szám képezhető, ezért összesen 12 számot írhatott le Peti. 1 pont

Összesen: 10 pont

4. Zsófi és Bence választott magának egy-egy pozitív egész számot, majd mindketten felírják a választott szám összes pozitív osztóját. Bence 8, Zsófi 9 számot ír a táblára. A mindkettejük által leírt számok közül a legnagyobb az 50. Melyik számot választotta Zsófi, és melyiket Bence?

Megoldás:

Az $50=2\cdot 5^2$ számnak 6 pozitív osztója van: 1; 2; 5; 10; 25 és 50. 1 pont
Ha Zsófi vagy Bence olyan számot választott volna, amelyeknek a 2-n és az 5-ön kívül van más p prímosztója, akkor a számnak legalább 12 osztója lenne, mert az 50 minden osztója és azoknak a p-szeresei is osztói lennének a számnak. Így ez nem lehetséges. 1 pont
Ezért Zsófi és Bence is olyan számot választott, amelynek prímtényezős felbontása $2^a\cdot 5^b$, ahol a pozitív egész szám, b pedig 2-nél nem kisebb pozitív egész szám. 1 pont
A 100-nak 9 pozitív osztója van (1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100), ezt választhatta Zsófi. 1 pont
Ha $a \geq 2$, $b \geq 2$, és legalább az egyik kitevő nagyobb, mint 2, akkor a számnak 9-nél több osztója van, hiszen a 100 összes osztója osztja ezt a számot is, plusz a szám, ami nagyobb 100-nál, még egy további osztó. 1 pont
Ha a választott szám $2\cdot 5^b$ alakú, akkor osztói az 1, a 2; és az 5^c alakú számok, ahol c értéke

1; 2; 3; …; *b* lehet, illetve a $2\cdot 5^c$ alakú számok, ahol *c* értéke szintén 1; 2; 3; …; *b* lehet.

Az osztók száma $2+2b$, vagyis egy páros szám. 1 pont

Zsófi tehát csak a 100-at választhatta, Bence pedig egy $2\cdot 5^b$ alakú számot. 1 pont

A Bence által választott szám osztóinak száma $2+2b=8$, ezért $b=3$. 1 pont

A Bence által választott szám $2\cdot 5^3=250$,

a 100-nak és a 250-nek a legnagyobb közös osztója pedig valóban 50. 1 pont

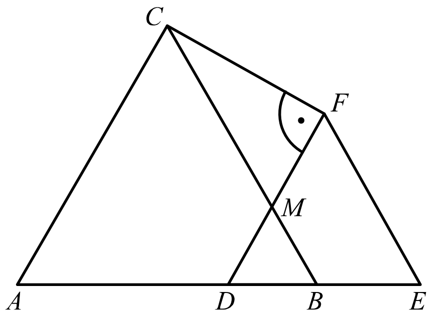
Bence a 250-et választotta. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Az ábrán látható *ABC* és *DEF* háromszögek szabályosak. A *D* csúcs az *AB* oldal belső pontja, *E* az *AB* oldal *B*-n túli meghosszabbításán van. A *DF* oldal merőleges a 6 cm hosszú *CF* szakaszra. A *BC* és *DF* oldalak metszéspontja az *M* pont. Az *ABC* háromszög és az *ADMC* négyszög területének aránya 4:3.
(Az ábra nem méretarányos.)

a) Hányadrésze a *DBM* háromszög területe az *ABC* háromszög területének?

b) Számítsd ki a *DF* szakasz hosszának négyzetét!



Megoldás:

a) Ha $\dfrac{T_{ABC}}{T_{ADMC}}=\dfrac{4}{3}$, akkor $\dfrac{T_{ADMC}}{T_{ABC}}=\dfrac{3}{4}$, 1 pont

ezért a *DBM* háromszög területe az *ABC* háromszög területének a negyede. 1 pont

b) A *DM* és *AC* szakaszok párhuzamosak, és a *DBM* háromszög területe negyede az *ABC* háromszög területének. A háromszög középvonalára igaz, hogy párhuzamos a szemközti oldallal, és az általa levágott kis háromszög területe negyede az eredeti háromszög területének, hiszen a kis háromszög magassága és oldala is fele az eredeti háromszög magasságának és oldalának. Ha egy, a középvonallal párhuzamos szakaszt veszünk, akkor az általa levágott háromszög területe vagy kisebb, vagy nagyobb, mint az eredeti háromszög területének negyede. Ezért *DM* a háromszög középvonala. 1 pont

Ezek szerint *D* az *AB* oldal felezőpontja, és *CD* merőleges *AB*-re. 1 pont

Mivel $CDB\sphericalangle=90°$ és $BDF\sphericalangle=60°$, ezért $CDF\sphericalangle=90°-60°=30°$. 1 pont

A *CDF* háromszög egy félszabályos háromszög, mert van egy 90°-os és egy 30°-os szöge, 1 pont

ezért $CD=2\cdot CF=2\cdot 6=12$ cm. 1 pont

A *CDF* háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt, kapjuk, hogy $DF^2+CF^2=CD^2$, 1 pont

ezért $DF^2=CD^2-CF^2=12^2-6^2=144-36=108$ (cm^2). 1 pont

Tehát a *DF* szakasz hosszának négyzete 108 cm^2. 1 pont

Összesen: 10 pont

* * * * *

Több megoldásból csak egy kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.

A dolgozatok pontszámai 2024. február 13-án kerülnek fel a www.mategye.hu honlapra. A versenyzők a saját pontszámukat (a feladatlapon lévő számmal), az iskolák a tanulóik pontszámát (az iskolai kódszámmal és jelszóval) tekinthetik meg. A pontszámokkal kapcsolatban 2024. február 15-én 14 óráig lehet reklamálni a Mategye Alapítvány címére küldött e-mailben (mategye@mategye.t-online.hu). A döntőbe jutott tanulók névsora és a döntő helyszínei a www.mategye.hu címen 2024. február 19-től lesznek láthatóak, a 3. forduló helyszíneivel együtt.

Kecskemét, 2024. január 23.

A Szervezőbizottság