7. osztály, 1. kategória

1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek mindegyik számjegye páros, és legalább az egyik számjegye 0? (Az egyik ilyen szám a 2024.)

Első megoldás:

Csoportosítsuk az eseteket a nullák száma alapján. Ha 3 nulla van a számban, akkor a százas, tízes és egyes helyi értéken nulla áll, az ezres helyi értéken pedig 2; 4; 6; 8 állhat, vagyis 4-féle számjegy, tehát 4 ilyen szám van. (Ezek a következők: 2000; 4000; 6000; 8000.)	2 pont
Ha a szám 2 nullát tartalmaz, akkor a nullák helyét 3-féleképpen választhatjuk ki, mert a százas, tízes, egyes helyi értékek közül az egyiken nem áll nulla, a másik kettőn igen.	1 pont
Miután a két nullát elhelyeztük, az üresen maradt két helyi értékre 4-féle számjegy kerülhet,	1 pont
ezért ebben az esetben $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ ilyen szám van.	1 pont
Ha a szám 1 nullát tartalmaz, akkor a nullák helyét 3-féleképpen választhatjuk meg,	1 pont
az üresen maradó 3 helyiértékre egyaránt 4-féle számjegy kerülhet,	1 pont
ezért ebben az esetben $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ ilyen szám van.	1 pont
Az esetek száma összesen $4 + 48 + 192 = 244$.	1 pont
244 négyjegyű szám felel meg a feladat feltételeinek.	1 pont
Összesen:	10 pont

Második megoldás:

Ötféle páros számjegy van.	1 pont
Egy négyjegyű szám első számjegye nem lehet nulla,	1 pont
ezért $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ olyan négyjegyű szám van, amelynek mindegyik számjegye páros.	2 pont
Ha a szám nem tartalmaz egyetlen nullát sem, de mindegyik számjegye páros, akkor mindegyik helyi értékre 4-féle számjegyet írhatunk,	1 pont
ezért $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ ilyen négyjegyű szám van.	2 pont
Az 500 négyjegyű számból, amelynek mindegyik számjegye páros, 256 darab nem tartalmaz nullát, a többi $500 - 256 = 244$ viszont igen.	2 pont
244 négyjegyű szám felel meg a feladat feltételeinek.	1 pont
Összesen:	10 pont

2. Zsófi ovis csoportjába 50-nél kevesebben járnak. Szerdán reggel kettes sorban mentek a játszótérre, mindenki egy társának fogta a kezét. A fiúk 70 százaléka fogta egy fiú kezét, és a lányok 40 százaléka fogta egy lány kezét. Hány gyerek jár az ovis csoportba, ha szerdán senki sem hiányzott?

Megoldás:

Ha a fiúk 70%-a fogta egy fiú kezét, akkor a fiúk 30%-a fogta egy lány kezét.	1 pont
Ha a lányok 40%-a fogta egy lány kezét, akkor a lányok 60%-a fogta egy fiú kezét.	1 pont
Így a fiúk számának 30%-a egyenlő a lányok számának 60%-ával, ami azt jelenti, hogy a fiúk száma kétszerese a lányok számának.	2 pont
A fiúk száma a 10 többszöröse, mert csak ekkor lesz a fiúk számának 70%-a egész szám. Ekkor a lányok száma az 5 többszöröse, és ennek a 40%-a egész szám.	1 pont
Ha a fiúk száma 10, akkor a lányok száma 5, a csoport létszáma 15. Ez az eset nem lehetséges, mert akkor nem tudnának kettes sorban menni.	1 pont
Ha a fiúk száma 20, akkor a lányok száma 10, a csoport létszáma 30. Ebben az esetben tudnak kettesével menni.	1 pont
Ha a fiúk száma 30, akkor a lányok száma 15, a csoport létszáma 45. Ez az eset nem lehetséges, mert akkor nem tudnának kettes sorban menni.	1 pont
Ha a fiúk száma 40 vagy ennél több, akkor a lányok száma legalább 20, tehát a csoport létszáma 60 vagy ennél több, ami nem felel meg a feladat feltételeinek.	1 pont
Ellenőrzés: Ha a fiúk száma 20, akkor ennek 70%-a 14, vagyis 7 párt alkottak csak fiúk, és 6 fiú fogta egy lány kezét. A lányok száma 10, ennek a 40%-a 4, vagyis 2 párt alkottak csak lányok, és 6 lány fogta fiú kezét. 7 fiúpár, 2 lánypár és 6 vegyespár ment a sorban, tehát összesen 15 pár, vagyis 30 gyerek. 30 gyerek jár Zsófi ovis csoportjába.	1 pont
Összesen:	10 pont

7. osztály, 1. kategória

3. Egy színház nézőterén minden sorban 50 szék van, de nem mindegyik széken ülnek. Peti és Zsóka ugyanabban a sorban ülnek. Petitől jobbra ötször annyian ülnek, mint tőle balra. Zsókától balra hatszor annyian ülnek, mint tőle jobbra. Hány szék lehet a sorban Peti és Zsóka között?

Megoldás:

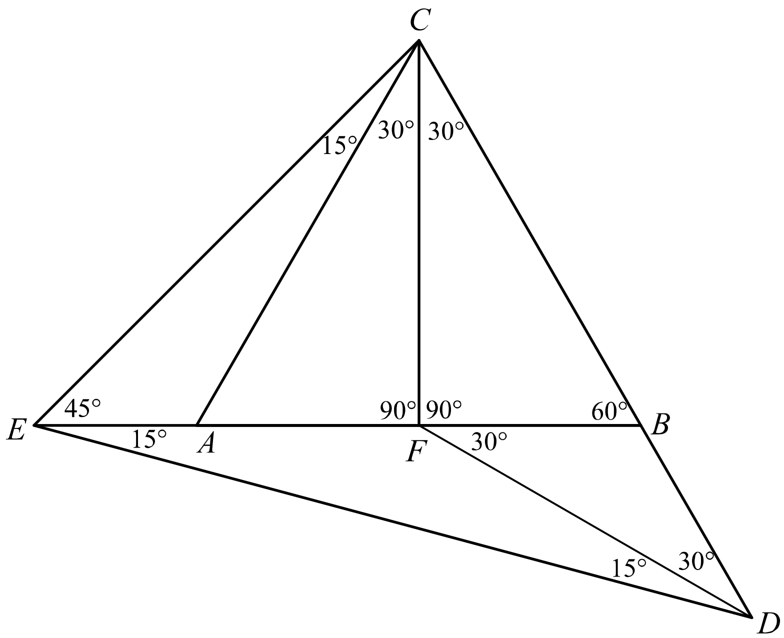
Legyen a nézők száma n. Mivel Peti és Zsóka is ebben a sorban ülnek, ezért $n \geq 2$.	
Petitől balra a sorban ülő többi nézők számának egyhatod része ül,	1 pont
tehát $n-1$ osztható 6-tal.	1 pont
Zsókától jobbra a sorban ülő többi nézők számának egyheted része ül,	1 pont
tehát $n-1$ osztható 7-tel.	1 pont
Ha $n-1$ osztható 6-tal és 7-tel is, és értéke legfeljebb 49, akkor $n-1=42$.	1 pont
A sorban összesen 43 széken ülnek, és 7 szék maradt üresen.	1 pont
Petitől balra $42:6=7$ néző ül, Zsókától jobbra pedig $42:7=6$ néző.	1 pont
Petitől jobbra $42-7=35$ néző ül, Zsókától jobbra 6 néző, vagyis Zsóka Petitől jobbra ül. Kettőjükön kívül még 41 néző ül a sorban, ezért Peti és Zsóka között $41-6-7=28$ néző ül.	1 pont
A 7 üres szék közül akármennyi lehet Peti és Zsóka között.	1 pont
Peti és Zsóka között 28; 29; 30; 31; 32; 33; 34 vagy 35 szék lehet.	1 pont
Összesen:	10 pont

4. Az ABC szabályos háromszög AB oldalának felezőpontja az F pont. Az AB oldal A-n túli meghosszabbításán felvettük az E pontot úgy, hogy $FE = FC$, a BC oldal B-n túli meghosszabbításán pedig a D pontot úgy, hogy $2 \cdot BD = BC$.

a) Bizonyítsd be, hogy a DCF háromszög egyenlő szárú!

b) Hány fokosak a CED háromszög belső szögei?

Megoldás:



Készítsünk egy ábrát.	1 pont
a) $BF = BD$, mert mindkét szakasz fele olyan hosszú, mint az ABC háromszög egy oldala.	1 pont
A BFD háromszög egyenlő szárú, B csúcsnál lévő külső szögének nagysága 60°, alapon fekvő szögei pedig egyenlőek, ezért $BFD\sphericalangle = BDF\sphericalangle = 30°$.	1 pont
CF az ABC háromszög szimmetriatengelye, ezért felezi a C csúcsnál lévő belső szöget, tehát $DCF\sphericalangle = BCF\sphericalangle = \frac{60°}{2} = 30°$.	1 pont
A DCF háromszögben $DCF\sphericalangle = CDF\sphericalangle = 30°$, tehát a háromszög egyenlő szárú.	1 pont

b) Az EFC háromszög egyenlő szárú, mert $FE = FC$. A CF szimmetriatengely merőlegesen felezi az AB oldalt, ezért az EFC háromszög derékszögű,

így alapon fekvő szögei $FCE\sphericalangle = FEC\sphericalangle = 45°$. 1 pont
Az FDC egyenlő szárú háromszögben $FD = FC$, ezért $FE = FC$ miatt $FD = FE$,
tehát az EDF háromszög is egyenlő szárú, 1 pont
F csúcsnál lévő külső szögének nagysága 30°,
alapon fekvő szögei pedig egyenlőek, ezért $FED\sphericalangle = FDE\sphericalangle = \frac{30°}{2} = 15°$. 1 pont
$CED\sphericalangle = 45° + 15° = 60°$, $EDC\sphericalangle = 30° + 15° = 45°$ és $DCE\sphericalangle = 30° + 45° = 75°$. 1 pont
A CED háromszög belső szögeinek nagysága 45°, 60° és 75°. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Az iskolai focibajnokság egyik mérkőzésén a lányok egy hosszú padon ülve szurkoltak az osztály fiúcsapatának. Mindegyik lányon piros, fehér, zöld vagy kék póló volt. Bármelyik 5 egymás mellett ülő lány közül legalább egy piros pólóban volt, bármelyik 7 egymás mellett ülő lány közül legalább kettőn fehér póló volt, bármelyik 9 egymás mellett ülő lány közül legalább hármon zöld póló volt, és bármelyik 11 egymás mellett ülő lány közül legalább négyen kék póló volt. Hány lány ült a padon, ha számuk a lehető legtöbb volt?

Megoldás:

A feladat feltételei alapján 11 egymás mellett ülő lány közül legalább 2 piros, legalább 2 fehér, legalább 3 zöld és legalább 4 kék pólóban szurkol a fiúknak. 1 pont
Mivel $2 + 2 + 3 + 4 = 11$, ezért 11 egymás mellett ülő lány közül pontosan 2 piros, 2 fehér, 3 zöld és 4 kék pólós. 2 pont
A 11 egymás mellett ülő lány közül hagyjuk el az egyik szélsőt.
A többi 10 lány között legalább 2 piros, legalább 2 fehér, legalább 3 zöld és legalább 3 kék pólós, ezért a szélső csak kék pólós lehet. 1 pont
Ez azt is jelenti, hogy ha egy sorban $10 + n$ lány ül, akkor a sor mindkét szélén ülő n lány csak kék pólóban szurkolhat. 1 pont
Bizonyítsuk be először, hogy a lányok száma nem lehet 13 vagy több.
A 13 egymás mellett ülő lány közül mindkét szélén 3-3 lányon kék póló van.
A 11 lányról elmondottak alapján a köztük lévő 7 lány közül 2 piros, 2 fehér és 3 zöld pólóban ül. A fehér pólósokra vonatkozó feltétel miatt viszont az említett 7 lány közül az első 4 között is van 2 fehér pólós, hiszen ők a szélén ülő 3 kék pólóssal együtt már 7-en vannak, és a második 4 között is van 2 fehér pólós. Ez csak akkor teljesülhet, ha a 7 középen ülő lány közül legalább 3 fehér pólós (a középső, és tőle balra is, jobbra is még egy-egy). Tehát ha csak 2 lány van fehér pólóban, akkor a feladat feltételei nem teljesülnek. Nem lehet a lányok száma 13 vagy több. 2 pont
A lányok száma legfeljebb 12 lehet. 1 pont
Ez lehetséges, például a következő ülésrend esetén: KKKZPFFZZPKK. 2 pont

Összesen: 10 pont

* * * * *

Több megoldásból csak egy kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.

A dolgozatok pontszámai 2024. február 13-án kerülnek fel a www.mategye.hu honlapra. A versenyzők a saját pontszámukat (a feladatlapon lévő számmal), az iskolák a tanulóik pontszámát (az iskolai kódszámmal és jelszóval) tekinthetik meg. A pontszámokkal kapcsolatban 2024. február 15-én 14 óráig lehet reklamálni a Mategye Alapítvány címére küldött e-mailben (mategye@mategye.t-online.hu). A döntőbe jutott tanulók névsora és a döntő helyszínei a www.mategye.hu címen 2024. február 19-től lesznek láthatóak, a 3. forduló helyszíneivel együtt.

Kecskemét, 2024. január 23.

A Szervezőbizottság