7. osztály, 2. kategória

1. Egy iskolában a jó tanuló gyerekek harmada jó sportoló. A jó sportoló tanulóknak a negyedrésze jó tanuló. Az iskola tanulóinak 85%-a se nem jó tanuló, se nem jó sportoló. Hány tanulója van az iskolának, ha a jó sportolók száma 8-cal több a jó tanulók számánál?

Első megoldás:

Az iskola tanulóinak 100% – 85% = 15%-a jó tanuló vagy jó sportoló. 1 pont

Jelölje a jó tanuló és jó sportoló tanulók számát x.

Ez a jó tanulók számának a harmada, ezért a csak jó tanulók száma $2x$. 1 pont

A jó sportolók számának a negyedrésze x, ezért a csak jó sportolók száma $3x$. 1 pont

Az iskola tanulóinak 15%-a: $x + 2x + 3x = 6x$, 1 pont

amiből x az iskola tanulóinak $15 : 6 = 2{,}5\%$-a. 1 pont

A jó sportolók száma $x + 3x = 4x$, a jó tanulók száma $x + 2x = 3x$, így a különbségük x. 1 pont

A feladat feltételei szerint ez 8 tanuló, másrészt ez a tanulók 2,5%-a. 1 pont

A tanulók 5%-a tehát $8 \cdot 2 = 16$ fő, és így a 100%-a $16 \cdot 20 = 320$ fő. 1 pont

Ellenőrzés: 320-nak a 15%-a $320 \cdot 0{,}15 = 48$, ebből $3 \cdot 8 = 24$ jó tanuló,

$4 \cdot 8 = 32$ jó sportoló, és $24 + 32 - 8 = 48$. 1 pont

Az iskolának 320 tanulója van. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Ha azoknak a gyereknek a számát, akik jó tanulók és jó sportolók,
kivonjuk a jó tanulók számából és a jó sportolók számából is, akkor a különbség nem változik, így a csak jó sportoló tanulók száma 8-cal több a csak jó tanulók számánál. 1 pont

A csak jól tanulók száma legyen t, ekkor a csak jól sportoló tanulók száma $t + 8$.

A feltételek miatt a jó tanuló és jó sportolók száma egyrészt $\frac{t}{2}$, másrészt $\frac{t+8}{3}$, 1 pont

ezért felírható a következő egyenlet:

$$\frac{t}{2} = \frac{t+8}{3}.$$ 1 pont

Az egyenlet mindkét oldalát 6-tal szorozva: 1 pont

$$3t = 2t + 16,$$ 1 pont

ahonnan $t = 16$. 1 pont

A csak jó sportolók száma $16 + 8 = 24$ fő, a jó tanuló és jó sportolók száma $\frac{16}{2} = 8$ fő,

ez összesen $16 + 24 + 8 = 48$ fő, ami az összes tanulók számának 100% – 85% = 15%-a. 1 pont

A tanulók 5%-a tehát $48 : 3 = 16$ fő, ezért a 100%-a $16 \cdot 20 = 320$ tanuló. 1 pont

Ellenőrzés: 320-nak a 15%-a ebből $16 + 8 = 24$ jó tanuló,

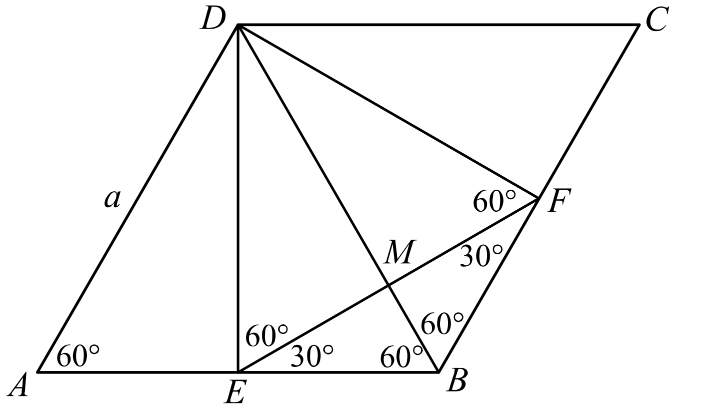
$24 + 8 = 32$ jó sportoló, és $24 + 32 - 8 = 48$. 1 pont

Az iskolának 320 tanulója van. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Az $ABCD$ rombusz D csúcsából az AB oldalra állított merőleges talppontja az E, a BC oldalra állított merőleges talppontja az F pont. A DEF háromszög szabályos. Hányadrésze a DEF háromszög területe a rombusz területének?

Első megoldás:



Készítsünk egy ábrát és használjuk az ábra jelöléseit. 1 pont

A feladat feltételei miatt $FEB\sphericalangle = EFB\sphericalangle = 90° - 60° = 30°$,

ezért az EBF háromszög harmadik belső szöge $EBF\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$. 1 pont

A rombusz két szomszédos szögének összege 180°, ezért $DAB\sphericalangle = 180° - 120° = 60°$. 1 pont

$AB = AD = a$, ezért az ABD háromszög egyenlő szárú, így a BD alapon

fekvő szögeinek nagysága $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy az ABD háromszög szögei egyenlők, ezért ez egy szabályos háromszög. A DE szakasz ennek a háromszögnek a szimmetriatengelye, ezért felezi a háromszög területét. 1 pont

A rombusz BD átlója a rombusz szimmetriatengelye, ezért felezi a rombusz területét. Az ABD háromszög területe a rombusz területének a fele, az AED háromszög területe pedig az ABD háromszög területének a fele, vagyis a rombusz területének a negyede. 1 pont

A DFC háromszög az AED háromszög tükörképe a rombusz BD átlójára nézve, ezért ennek a területe is a rombusz területének a negyede.

Az AED és a DFC háromszögek területének összege a rombusz területének a fele, ezért az $EBFD$ négyszög területe is fele a rombusz területének. 1 pont

Az EBM háromszög M-nél levő szöge $180° - (30° + 60°) = 90°$.

Ebben a félszabályos háromszögben a 30 fokos szöggel szemközti befogó hossza fele az átfogó hosszának, tehát $MB = \frac{EB}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}$. 1 pont

Az EFD háromszög EF oldalhoz tartozó magassága $MD = BD - MB = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$,

tehát 3-szor olyan hosszú, mint az EBF háromszög EF oldalhoz tartó MB magassága. A két háromszög EF oldala közös, ezért területeik aránya egyenlő az EF oldalhoz tartozó magasságaik arányával, vagyis az EFD háromszög területe háromszorosa az EBF háromszög területének. 1 pont

Az EFD háromszög területe $\frac{3}{4}$ része az $EBFD$ négyszög területének,

tehát a rombusz területének $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ része. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Készítsünk egy ábrát és használjuk az ábra jelöléseit. 1 pont

A feladat feltételei miatt $FEB\sphericalangle = EFB\sphericalangle = 90° - 60° = 30°$,

ezért az EBF háromszög harmadik belső szöge $EBF\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$. 1 pont

A rombusz két szomszédos szögének összege 180°, ezért $DAB\sphericalangle = 180° - 120° = 60°$. 1 pont

Mivel $AB = AD = a$, ezért az ABD háromszög egyenlő szárú, így a BD alapon

fekvő szögeinek nagysága $\dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$. 1 pont

Az ABD háromszög szabályos, mert szögei egyenlők. A DE szakasz a rombusznak és az ABD háromszögnek is magassága, hosszúságát jelölje m. A rombusz területe $T = a \cdot m$. 1 pont

Az AED háromszög AE oldala $\dfrac{a}{2}$ hosszúságú, mert a szabályos ABD háromszög

DE magassága felezi az AB oldalt. 1 pont

Az AED háromszög területe $T_{AED} = \dfrac{\frac{a}{2} \cdot m}{2} = \dfrac{a \cdot m}{4} = \dfrac{T}{4}$. 1 pont

A DFC és az AED háromszögek egymás tükörképei a BD átlóra nézve,

ezért egyrészt az F pont a BC oldal felezőpontja, másrészt $T_{FCD} = T_{AED} = \dfrac{T}{4}$. 1 pont

Az EBF háromszögben $EB = \dfrac{a}{2}$, a hozzá tartozó magasság pedig $\dfrac{m}{2}$, mivel az F pont

a BC oldal felezőpontja, ezért fele olyan távolságra van az AB egyenestől, mint a C pont.

Az EBF háromszög területe $T_{EBF} = \dfrac{\frac{a}{2} \cdot \frac{m}{2}}{2} = \dfrac{a \cdot m}{8} = \dfrac{T}{8}$. 1 pont

A DEF háromszög területe $T_{DEF} = T - T_{AED} - T_{FCD} - T_{EBF} = T - \dfrac{T}{4} - \dfrac{T}{4} - \dfrac{T}{8} = \dfrac{3}{8} \cdot T$,

tehát a rombusz területének a $\dfrac{3}{8}$ része. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. A hetedikesek iskolai sakkversenyére 10 tanuló nevezett, közöttük Tomi is. A versenyen mindenki mindenkivel egyszer játszik. Győzelemért 1 pont, döntetlenért 0,5 pont, vereségért 0 pont jár. A versenyen az első négy helyezést elért tanuló képviselheti az iskolát a városi döntőben. Ha két vagy több versenyző ugyanannyi pontot szerez, akkor sorsolással döntik el a holtversenyben lévők között a helyezéseket. Hány pontot kell szereznie Tominak, hogy biztosan a legjobb négy között legyen?

Megoldás:

A versenyen $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$ mérkőzésre kerül sor,

ezért összesen 45 pontot szereznek a versenyzők. 1 pont

Az utolsó 6 helyezett egymás között $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ mérkőzést játszik,

ezért ők összesen legalább 15 pontot szereznek. 1 pont

Az első 4 helyezett így legfeljebb $45 - 15 = 30$ pontot szerezhet összesen. 1 pont

Az első 4-nek maximum 30 pontja lesz, ezért a 4. helyezettnek nem lehet

$30 : 4 = 7{,}5$-nél több pontja, 1 pont

és pontosan 7,5 pontja csak úgy lehet, ha az első 4 helyen mindenkinek 7,5 pontja van. 1 pont

Ez meg is valósulhat, ha az első négy helyezett mindegyike megveri az utolsó 6 helyezett mindegyikét, így 6-6 pont szereznek, míg mindegyik egymás közti mérkőzésük döntetlen eredménnyel zárul, ez még további $3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ pont fejenként, összesen $6 + 1{,}5 = 7{,}5$ pont. 1 pont

Az 5. helyezettnek ekkor legfeljebb 5 pontja lehet,

tehát ebben az esetben Tomi biztosan a legjobb 4 között végez. 1 pont
7 pont viszont már nem biztos, hogy elég a továbbjutáshoz.
Ha az első öt mindegyike legyőzi a 6-10. helyezett mindegyikét, ezzel 5-5 pontot szereznek, egymással pedig döntetlent játszanak, ez még további $4 \cdot 0{,}5 = 2$ pont fejenként, ekkor az első 5 helyen mindenkinek 7 pontja van, ötös holtverseny alakul ki, és a sorsolás nem jelent biztos továbbjutást, valaki 7 ponttal nem jut tovább. 2 pont
Tominak 7,5 pontot kell szerezni. 1 pont

Összesen: 10 pont

4. Egy 2×13-as táblázat mindegyik cellájába egy-egy pozitív egész számot írtunk.
a) Bizonyítsd be, hogy a táblázat mindkét sorában van öt olyan szám, amely 3-mal osztva ugyanannyi maradékot ad!
b) Bizonyítsd be, hogy a táblázat 13 oszlopából kiválaszthatunk három oszlopot úgy, hogy az azokban felül lévő három szám összege is osztható 3-mal és az alul lévő három szám összege is osztható 3-mal!

Megoldás:

a) A számok 3-as maradékuk szerint 3 csoportba sorolhatók: 0; 1 vagy 2 maradékot adók. 1 pont
Ha valamelyik sorban a 13 szám 3-as maradékai között nem lenne olyan, ami legalább 5-ször előfordul, akkor mindhárom maradék legfeljebb 4-szer fordulna elő, de az csak legfeljebb 12 szám lenne. 1 pont
Ez nem lehetséges, ezért van legalább öt olyan szám, amely ugyanannyi maradékot ad 3-mal osztva. 1 pont
b) Válasszunk ki a felső sorból 5 olyan számot, amelyek 3-as maradéka egyenlő.
Ezek közül bármelyik három összege osztható 3-mal. 1 pont
Nézzük először azt az öt oszlopot, amelyek felső számai az előbb kiválasztott számok. 1 pont
Az alsó öt szám hármas maradékait tekintve két eset lehetséges.
1. eset: Mindhárom maradék előfordul. Ez esetben a három különböző maradék összege $0+1+2=3$ osztható 3-mal, így az ezeknek megfelelő 3 oszlop teljesíti a feltételeket. 2 pont
2. eset: valamelyik maradék nem fordul elő. Ekkor az egyik legalább háromszor szerepel, mert ha mindkettő legfeljebb 2-szer lenne, az csak legfeljebb 4 szám lenne. 2 pont
Ebben az esetben a három azonos maradékú számot tartalmazó oszlopot választjuk, amelyek teljesítik a feladat feltételeit. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Egy távoli bolygó lakóinak óráján három mutató forog állandó, de mindhárom különböző sebességgel egy közös tengely körül. Kezdetben a három mutató fedi egymást. Az órát elindítják és az óra addig jár, amíg a három mutató először fedi egymást a kiindulási helyen. Hány előzés történt összesen, ha a leggyorsabb mutató 6-szor előzte meg a leglassabbat? (Az előzés azt jelenti, hogy egy mutató utolér és el is hagy egy lassabbat.)

Megoldás:

Ha a leggyorsabb 6-szor előzte meg a leglassabbat, akkor 7 körrel tett meg többet, de hetedszerre csak utolérte, nem előzte meg. 2 pont
A közepes sebességű így 1; 2; 3; 4; 5 vagy 6 körrel tehetett meg többet, mint a leglassabb. 1 pont
Ha 1 körrel tett meg többet, mint a leglassabb, akkor nem előzte meg, csak utolérte azt, 1 pont
őt pedig a leggyorsabb 5-ször előzte, mert nála 6 körrel ment többet. 1 pont
Így ez esetben az előzések számának összege: $6+0+5=11$. 1 pont
Ha 2 körrel tett meg többet, akkor a leglassabbat 1-szer, míg őt a leggyorsabb 4-szer előzte, tehát az előzések számának összege: $6+1+4=11$. 1 pont
Látható, hogy ha a fenti összeg 2. tagját valamennyivel növeljük, akkor a 3. tag ugyanannyival csökken, míg az első változatlan, tehát az összeg nem változik. 2 pont
Összesen 11 előzés történt. 1 pont

Összesen: 10 pont

7. osztály, 2. kategória

* * * * *

Több megoldásból csak egy kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.

A dolgozatok pontszámai 2024. február 13-án kerülnek fel a www.mategye.hu honlapra. A versenyzők a saját pontszámukat (a feladatlapon lévő számmal), az iskolák a tanulóik pontszámát (az iskolai kódszámmal és jelszóval) tekinthetik meg. A pontszámokkal kapcsolatban 2024. február 15-én 14 óráig lehet reklamálni a Mategye Alapítvány címére küldött e-mailben (mategye@mategye.t-online.hu). A döntőbe jutott tanulók névsora és a döntő helyszínei a www.mategye.hu címen 2024. február 19-től lesznek láthatóak, a 3. forduló helyszíneivel együtt.

Kecskemét, 2024. január 23.

A Szervezőbizottság