8. osztály

1. Nóri leírt a füzetébe három egymást követő páros számot, Marci pedig öt egymást követő páratlan számot. A Nóri által leírt legnagyobb szám 5-tel volt kisebb, mint a Marci által leírt legkisebb szám. A két gyerek által leírt nyolc szám összege 2023 volt. Melyik számokat írta le Nóri?

Megoldás:

Legyen a legkisebb leírt szám x, ekkor a Nóri által leírt számok x; $x+2$ és $x+4$, 1 pont

a Marci által leírt számok pedig $x+9$; $x+11$; $x+13$; $x+15$ és $x+17$. 1 pont

A két gyerek által leírt nyolc szám összege:

$$8x+71=2023.$$ 2 pont

Az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezésből 71-et kivonva:

$$8x=1952.$$ 1 pont

Az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezést 8-cal osztva:

$$x=244.$$ 1 pont

Ellenőrzés: Nóri a 244; 246 és 248 számokat, Marci pedig a 253; 255; 257; 259 és 261 számokat írta le a füzetébe. Nóri páros, Marci páratlan számokat írt le, és a nyolc leírt szám összege $244+246+248+253+255+257+259+261=2023$. 2 pont

Nóri a 244; 246 és 248 számokat írta le. 2 pont

Összesen: 10 pont

További útmutató a javító tanárok részére:

A helyes válasz indoklás nélküli közléséért legfeljebb 2 pont adható. Ha a versenyző a helyes válaszon kívül indoklásként csak ellenőrzést végzett, akkor az ellenőrzésért legfeljebb további 2 pontot, vagyis összesen legfeljebb 4 pontot kaphat. Ha a versenyző leírt megoldása minden előkészítés nélkül az egyenlet felírásával kezdődik, akkor az előkészítésért adható első 2 pontot ne kapja meg.

2. Törpiktor szeretett volna kikeverni 3 liter sárga és 5 liter kék festékből 8 liter zöld festéket. Sajnos, ehelyett 4 liter sárga és 4 liter kék festéket kevert össze, ezért nem a kívánt árnyalatot kapta. Hány litert kell kiöntenie az elkészített keverékből, hogy a kiöntött mennyiséget kék festékkel pótolva 8 liter, kívánt árnyalatú zöld festéket kapjon?

Első megoldás:

A keverékben 4 liter sárga festék van, ennek a mennyiségét 1 literrel,

tehát az eredetileg beleöntött mennyiségnek az $\frac{1}{4}$ részével kellene csökkenteni. 2 pont

Ezt úgy tudja elérni Törpiktor, ha a keveréknek az $\frac{1}{4}$ részét, 2 pont

vagyis 2 liter festéket kiönt. 2 pont

Ellenőrzés: Ekkor marad 6 liter keverék. Mivel a két szín aránya nem változik, így ennek fele, vagyis 3 liter sárga, a másik fele, vagyis 3 liter kék. Ehhez 2 liter kék festéket öntve a kapott arányt kapja, hiszen a keverék összesen 3 liter sárga és 5 liter kék festékből áll. 2 pont

Két litert kell kiöntenie Törpiktornak az elkészített keverékből. 2 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

A kívánt keveréknek $\frac{3}{8}$ része, az elkészített keveréknek pedig a fele sárga festék. 1 pont

Amikor Törpiktor kék festékkel pótolja a kiöntött keveréket, a sárga festék mennyisége nem változik, tehát a kiöntés után maradt sárga festék mennyisége egyenlő lesz a végső keverékben lévő sárga festék mennyiségével. 1 pont

Legyen a kiöntött festék mennyisége x liter. Felírható a következő egyenlet:

$$\frac{1}{2}\cdot(8-x)=\frac{3}{8}\cdot 8.$$ 2 pont

Az egyenlet jobb oldalán kijelölt szorzást elvégezve, majd az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezést 2-vel szorozva:

$8-x=6.$ 1 pont

Innen $x=2$. 1 pont

Ellenőrzés: Ha 2 liter keveréket önt ki Törpiktor, akkor ezzel 1 liter sárga és 1 liter kék festéket öntött ki, így ezt követően a keverék 3 liter sárga és 3 liter kék festéket tartalmaz. Ha hozzáönt 2 liter kék festéket, akkor a keverék 3 liter sárga és 5 liter kék festékből áll, tehát elérte a kívánt összetételt. 2 pont

Két litert kell kiöntenie Törpiktornak az elkészített keverékből. 2 pont

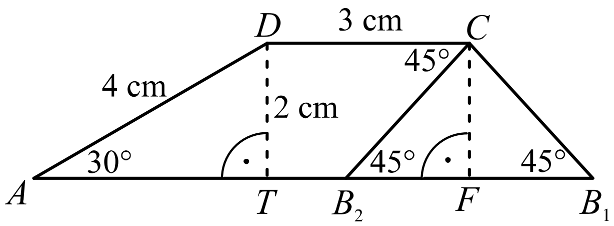
---

Összesen: 10 pont

További útmutató a javító tanárok részére:
A helyes válasz indoklás nélküli közléséért legfeljebb 2 pont adható. Ha a versenyző a helyes válaszon kívül indoklásként valójában csak ellenőrzést végzett, akkor az ellenőrzésért legfeljebb további 2 pontot, vagyis összesen legfeljebb 4 pontot kaphat. Ha a versenyző egyenlettel oldja meg a feladatot, és leírt megoldása minden előkészítés nélkül az egyenlet felírásával kezdődik, akkor a második megoldásban az előkészítésért adható első 2 pontot ne kapja meg.

3. Gréta és Hugó a következő házi feladatot kapták:
„Szerkesszétek meg az *ABCD* trapézt, ha *DC* alapjának hossza 3 cm, *AD* szárának hossza 4 cm, magassága 2 cm, egyik belső szögének nagysága 45°, és a *D* csúcsnál lévő belső szöge tompaszög!”
Mindketten jól és pontosan végezték el a szerkesztést, ennek ellenére az általuk rajzolt két trapéz nem lett egybevágó, Hugó trapézának nagyobb lett a területe.
a) Hány fokosak a két trapéz belső szögei?
b) Hány négyzetcentiméterrel nagyobb területű Hugó trapéza, mint Grétáé?

Megoldás:



Készítsünk ábrát és használjuk az ábra jelöléseit! 1 pont

Rajzoljuk be a trapéz *D* csúcsból húzott *DT* magasságát!
Az *ATD* derékszögű háromszög átfogója 4 cm hosszú, egyik befogójának hossza pedig ennek a fele, 2 cm. Az ilyen háromszöget félszabályos háromszögnek hívjuk, és tudjuk, hogy ennek hegyesszögei 30° és 60° nagyságúak. 1 pont

A trapéz egy száron lévő belső szögei egymásnak kiegészítő szögei, ezért ha az *A* csúcsnál lévő belső szög 30°-os, akkor a *D* csúcsnál lévő belső szög 150°-os. 1 pont

A két nem egybevágó trapézt úgy kaphatták a gyerekek, hogy a 45 fokos belső szög lehet a *B* csúcsnál (AB_1CD) vagy a *C* csúcsnál (AB_2CD) 1 pont

Mindkét esetben a trapéz *BC* szárra illeszkedő másik belső szöge 135°-os. 1 pont

A Hugó által rajzolt trapéz éppen a B_2B_1C háromszöggel nagyobb, mint a Gréta által rajzolt trapéz, így ennek a háromszögnek a területét kell kiszámolnunk. 1 pont

Ennek a háromszögnek két belső szöge 45°-os, ezért a harmadik belső szöge 90°-os.
Ezt az egyenlő szárú derékszögű háromszöget a *CF* magasságvonala két egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszögre osztja, ezért $B_2F = FC = FB_1 = 2$ cm, 1 pont

tehát $B_2B_1 = 4$ cm. A B_2B_1C háromszög területe $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$ cm^2. 1 pont

a) Mindkét trapéz belső szögeinek nagysága 30°, 45°, 135° és 150°. 1 pont

b) Hugó trapéza 4 négyzetcentiméterrel nagyobb területű, mint Grétáé. 1 pont

Összesen: 10 pont

További útmutató a javító tanárok részére:
Mindkét kérdésre adott helyes válasz indoklás nélküli közlésére 1-1 pont, összesen legfeljebb 2 pont adható. Ha a versenyző nem írt szöveges magyarázatot, csak az ábrára írta be a megfelelő adatokat, majd jól válaszolt a két kérdésre, akkor összesen legfeljebb 6 pontot kaphat. Ha a versenyző csak az egyik trapézt tudta megrajzolni, de annak alapján az a) kérdésre jól válaszolt és gondolatmenetét is szépen megfogalmazta, akkor erre a feladatra legfeljebb 5 pontot kaphat.

4. Zsófinak négy unokatestvére van, mindegyikük életkora években mérve pozitív egész szám. Ezekről az életkorokról azonban csak a következőket volt hajlandó elárulni:
„Anna életkorának vettem a reciprokát. Ehhez hozzáadtam Berci életkorát, és az összegnek vettem a reciprokát. Ehhez hozzáadtam Csabi életkorát, majd az így kapott összegnek vettem a reciprokát. Végül ehhez hozzáadtam Dorka életkorát, és így $\frac{122}{17}$-et kaptam eredményül."
Hány évesek Zsófi unokatestvérei?

Első megoldás:

Ha egy pozitív egész számhoz hozzáadunk egy tetszőleges pozitív számot, akkor 1-nél nagyobb pozitív számot kapunk. Ha ennek a számnak vesszük a reciprokát, akkor 1-nél kisebb pozitív számot kapunk. 2 pont

Gondolkodjunk visszafelé! Egy 1-nél kisebb pozitív számhoz hozzáadva Dorka életkorát, az összeg $\frac{122}{17} = 7\frac{3}{17}$ lett, 1 pont

tehát Dorka életkora 7 év. 1 pont

A $\frac{3}{17}$ a $\frac{17}{3}$ reciproka, amit úgy kaptunk, hogy Csabi életkorához hozzáadtunk egy 1-nél kisebb számot. Mivel $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$,

ezért Csabi 5 éves. 1 pont

A $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{2}$ reciproka, amit úgy kaptunk, hogy Berci életkorához hozzáadtunk egy 1-nél kisebb számot. Mivel $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, 1 pont

ezért Berci 1 éves. Anna életkorának a reciproka $\frac{1}{2}$, tehát Anna 2 éves. 1 pont

Ellenőrzés: $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, $\frac{2}{3} + 5 = \frac{17}{3}$, $\frac{3}{17} + 17 = \frac{122}{17}$. 1 pont

Anna 2, Berci 1, Csabi 5 és Dorka 7 éves. 2 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Jelöljük a gyerekek életkorát neveik kezdőbetűivel. A feladat feltételei alapján:

$$d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}=\frac{122}{17}. \quad (1)$$ 1 pont

A betűk pozitív egész számokat jelölnek, ezért $c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}>c\geq 1$, 1 pont

tehát $\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}<1.$ 1 pont

Mivel $\frac{122}{17}=7\frac{3}{17}$, ezért az (1) jelű egyenlet csak úgy teljesülhet,

ha $d=7$ és $\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}=\frac{3}{17}.$ 1 pont

Utóbbi egyenletből adódik, hogy $c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}=\frac{17}{3}=5\frac{2}{3}$,

ahonnan az előbbihez hasonlóan $c=5$ és $\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}=\frac{2}{3}.$ 1 pont

Utóbbi egyenletből adódik, hogy $b+\frac{1}{a}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$,

ahonnan $b=1$ és $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$, tehát $a=2$. 2 pont

Ellenőrzés: $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}+5=\frac{17}{3}$, $\frac{3}{17}+17=\frac{122}{17}$. 1 pont

Anna 2, Berci 1, Csabi 5 és Dorka 7 éves. 2 pont

Összesen: 10 pont

További útmutató a javító tanárok részére:

A helyes válasz indoklás nélküli közléséért legfeljebb 2 pont adható. Ha a versenyző a helyes válaszon kívül indoklásként csak ellenőrzést végzett, akkor az ellenőrzésért legfeljebb további 2 pontot, vagyis összesen legfeljebb 4 pontot kaphat. Ha a versenyző nem indokolja, hogy a megfelelő törteket vegyes számmá alakítva, az egész rész miért adja meg a megfelelő gyermek életkorát, akkor az ezért járó 2 pontot (első megoldásban első két pont, második megoldásban a második és harmadik pont) ne kapja meg.

5. Lala leírta a füzetébe azokat a négyjegyű pozitív egész számokat, amelyeknek minden számjegye 4-nél kisebb. Ezen a listán szerepelt az idei évszám, a 2023 is.

a) Hány olyan számot írt le Lala a füzetébe, amelyben a számjegyek összege 7?

b) Hány olyan számot írt le Lala a füzetébe, amelynek legalább az egyik számjegye nulla?

Első megoldás:

a) Csoportosítsuk a megfelelő számokat első számjegyük szerint.
Ha az első számjegy 1, akkor a másik három számjegy összege 6.
Ezek a számjegyek lehetnek 3; 3; 0 vagy 3; 2; 1 vagy 2; 2; 2.
Az első esetben ezeket 3-féleképpen lehet sorba rendezni,
hiszen 3-féleképpen választhatjuk ki a 0 helyét. 1 pont
A második esetben a lehetséges sorba rendezések száma $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$,
a harmadik esetben pedig 1, 1 pont
tehát a megfelelő 1-gyel kezdődő számok száma $3 + 6 + 1 = 10$. 1 pont
Ha az első számjegy 2, akkor a másik három számjegy összege 5.
Ezek a számjegyek lehetnek 3; 2; 0 vagy 3; 1; 1 vagy 2; 2; 1.
Ezen számjegyek lehetséges sorba rendezéseinek a száma rendre 6; 3 és 3,
tehát a megfelelő 2-vel kezdődő számok száma $6 + 3 + 3 = 12$. 1 pont
Ha az első számjegy 3, akkor a másik három számjegy összege 4.
Ezek a számjegyek lehetnek 3; 1; 0 vagy 2; 2; 0 vagy 2; 1; 1.
Ezen számjegyek lehetséges sorba rendezéseinek a száma rendre 6; 3 és 3,
tehát a megfelelő 3-mal kezdődő számok száma $6 + 3 + 3 = 12$. 1 pont
Lala $10 + 12 + 12 = 34$ olyan számot írt le, amelyben a számjegyek összege 7. 1 pont
b) Mivel az első számjegy nem lehet 0, ezért Lala összesen $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ számot írt le. 1 pont
Ezek közül $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ olyan van, amelyben egyik számjegy sem 0. 1 pont
$192 - 81 = 111$, , tehát 1 pont
Lala 111 olyan számot írt le, amelyben legalább az egyik számjegy 0. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

a) Ha a számjegyek összege 7, akkor a számjegyek a következők lehetnek:
3; 3; 1; 0 vagy 3; 2; 2; 0 vagy 3; 2; 1; 1 vagy 2; 2; 2; 1. 1 pont
Az első esetben a 0 helyi értéke lehet 3-féle, hiszen az első számjegy nem lehet 0,
ezt követően az 1 helyi értékét 3-féleképpen választhatjuk ki, és a fennmaradó két helyre
kell 3-asokat írnunk, tehát a lehetőségek száma $3 \cdot 3 = 9$. 1 pont
A második esetben az elsőhöz hasonlóan gondolkodhatunk: a 0 helyére 3, majd a 3 helyére
ismét 3 lehetőség közül választhatunk, így a lehetőségek száma ezúttal is $3 \cdot 3 = 9$. 1 pont
A harmadik esetben a 3 helyét 4-féleképpen, majd a 2 helyét 3-féleképpen választhatjuk ki,
tehát a lehetőségek száma ezúttal $4 \cdot 3 = 12$. 1 pont
Végül a negyedik esetben csak az 1-es helyét kell kiválasztanunk,
ezt pedig 4-féleképpen tehetjük meg. 1 pont
Lala $9 + 9 + 12 + 4 = 34$ olyan számot írt le, amelyben a számjegyek összege 7. 1 pont
b) Ha a nullák száma 3, akkor ezek csak a százas, tízes és egyes helyi értéken állhatnak,
az ezres helyi értékre pedig 3-féle számjegy írható, így Lala 3 ilyen számot írt le. 1 pont
Ha a nullák száma 2, akkor azok 3-féle helyre kerülhettek (százas és tízes, százas és egyes,
tízes és egyes), a másik két helyre 3-3-féle számjegy kerülhetett,
ezért Lala $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ ilyen számot írt le. 1 pont
Ha a nullák száma 1, akkor az 3-féle helyre kerülhetett, a másik három helyre 3-3-féle
számjegy kerülhetett, ezért Lala $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ ilyen számot írt le. 1 pont
Lala $3 + 27 + 81 = 111$ olyan számot írt le, amelyben legalább az egyik számjegy 0. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
Az a) részre legfeljebb 6 pont, a b) részre legfeljebb 4 pont adható. Mindkét kérdésre adott helyes válasz indoklás nélküli közlésére 1-1 pont, összesen legfeljebb 2 pont adható. Ha a versenyző valamelyik kérdésnél kihagy esetet, ezért rossz végeredményt kap, akkor az a) résznél legfeljebb 3, a b résznél legfeljebb 2 pontot kaphat.

* * * * *

Több megoldásból csak egy kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.

A dolgozatok pontszámait a www.mategye.hu honlapon kell rögzíteni 2023. december 12-ig.

Az 1. és 2. kategóriába tartozó, legalább 25 pontot elért versenyzők dolgozatait legkésőbb 2023. december 12-én postára kell adni a Mategye Alapítvány címére (6001 Kecskemét, Pf. 585).

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg. A második fordulóba továbbjutott tanulók névsora 2023. december 21-től a www.mategye.hu honlapon megtekinthető, ugyanitt láthatók 2024. január 10-től a második forduló helyszínei is.

A második fordulóba csak olyan tanuló juthat, akinek határidőig rögzítésre került a pontszáma, és határidőig elküldésre került a dolgozata.

Köszönjük a munkájukat!

Kecskemét, 2023. november 28.

A Szervezőbizottság