8. osztály

1. Egy 28 fős osztályban a gyerekek fele tanul angolul. Az osztályba néggyel több lány jár, mint fiú. A fiúk közül heten nem tanulnak angolul.
a) Hány fiú jár az osztályba?
b) Hány lány tanul angolul az osztályban?

Első megoldás:

a) Ha 4 lányt kiküldünk az osztályból, akkor a teremben maradt 24 tanuló között ugyanannyian lesznek a lányok és a fiúk,	2 pont
mégpedig $24:2=12$-en.	1 pont
Az osztályban a fiúk száma tehát 12.	1 pont
b) Az angolul tanulók száma $28:2=14$.	1 pont
A fiúk közül heten nem tanulnak angolul, vagyis $12-7=5$ fiú tanul angolul.	2 pont
Mivel összesen 14 gyerek tanul angolul, és közülük 5 fiú, ezért $14-5=9$ lány.	2 pont
Az angolul tanuló lányok száma 9.	1 pont
Összesen:	10 pont

Második megoldás:

a) Legyen a fiúk száma *x*, ekkor a lányok száma $x+4$.	1 pont
Felírható a következő egyenlet: $x+x+4=28$, vagyis $2x+4=28$.	1 pont
Az egyenlet mindkét oldalából 4-et kivonva, 2-vel való osztás után adódik, hogy $x=12$.	1 pont
Az osztályban a fiúk száma tehát 12.	1 pont
b) Az angolul tanulók száma $28:2=14$.	1 pont
A lányok száma az osztályban $x+4=16$.	1 pont
Mivel 7 fiú nem tanul angolul, ezért $28-7=21$ olyan tanuló ját az osztályba, aki lány vagy angolul tanul.	1 pont
Az angolul tanulók és a lányok számának összege $16+14=30$.	1 pont
Ez az összeg azért több az előbb kiszámolt 21-nél, mivel azt a $30-21=9$ lányt, aki angolul is tanul, kétszer számoltuk.	1 pont
Az angolul tanuló lányok száma 9.	1 pont
Összesen:	10 pont

További útmutató a javító tanároknak:
A két válasz indoklás nélküli közlésére 1-1 pont adható. Ha ezen kívül indoklás helyett a versenyző ellenőrzést végez úgy, hogy egy táblázatba vagy egy Venn-diagramba beírja a 4 részhalmaz elemszámát (angolul tanulók között 9 lány és 5 fiú, angolul nem tanulók között 7 lány és 7 fiú), majd ellenőrzi, hogy teljesülnek a feladat feltételei, akkor legfeljebb további 3 pontot kaphat, vagyis összesen legfeljebb 5 pontot érhet el.

2. Melyik az a legnagyobb pozitív egész szám, amelynek minden számjegye különböző, és bármely két szomszédos számjegyének összege osztható hárommal?

Első megoldás:

Egy pozitív egész szám annál nagyobb, minél több számjegyet tartalmaz.	1 pont
Két, ugyanannyi számjegyből álló pozitív egész szám közül pedig az a nagyobb, amelynek az azonos helyi értéken lévő számjegyeket összehasonlítva az első olyan számjegye, amelyben különböznek egymástól, nagyobb.	1 pont
Ha az első számjegy osztható hárommal, akkor a második számjegynek is hárommal oszthatónak kell lennie, majd minden további számjegynek is.	1 pont
Mivel csak 4 olyan számjegy van, ami osztható hárommal (0; 3; 6; 9), ezért az így kapott szám legfeljebb négyjegyű lehet.	1 pont
A hárommal nem osztható számjegyek közül az 1; 4; 7 számjegyek 1 maradékot, a 2; 5; 8 számjegyek 2 maradékot adnak hárommal osztva.	1 pont
Ha az első számjegyet ezek közül a számjegyek közül választjuk, akkor az 1 és 2 maradékot adó számokat felváltva kell egymás mellé írnunk, hogy teljesüljenek a feladat feltételei.	1 pont
Ezzel a módszerrel mind a 6 felsorolt számjegyet fel tudjuk használni,	1 pont

a hárommal osztható számjegyeket viszont nem,
így a kapott szám legfeljebb hatjegyű lehet. 1 pont
Ezek közül a legnagyobb a 875421. 1 pont
A 875421 a legnagyobb szám, amely megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Egy pozitív egész szám annál nagyobb, minél több számjegyet tartalmaz. 1 pont
Két, ugyanannyi számjegyből álló pozitív egész szám közül pedig az a nagyobb, amelynek az azonos helyi értéken lévő számjegyeket összehasonlítva az első olyan számjegye, amelyben különböznek egymástól, nagyobb. 1 pont
Írjuk először az első helyre a 9-et, majd próbáljunk úgy minél több számjegyet írni mellé, hogy teljesüljön a feltétel, és a nagyobb helyi értékre minél nagyobb számok kerüljenek. 1 pont
Az így kapható legnagyobb szám a 9630. 1 pont
A 8-cal kezdődő számok közül a legnagyobb a 875421, 1 pont
a 7-tel kezdődők közül a 784512, 1 pont
a 6-tal kezdődők közül a 6930, az 5-tel kezdődők közül az 578421, 1 pont
a 4-gyel kezdődők közül a 487512, a 3-mal kezdődők közül a 3960, 1 pont
a 2-vel kezdődők közül a 278451, az 1-gyel kezdődők közül pedig a 187542. 1 pont
A 875421 a legnagyobb szám, amely megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Összesen: 10 pont

További útmutató a javító tanároknak:
A helyes válasz indoklás nélküli közléséért csak 1 pont adható. Ha a versenyző ezen kívül ellenőrzi, hogy teljesülnek a feladat feltételei, kapjon további 1 pontot. Ha a versenyző nem a legnagyobb számot adja meg indoklás nélkül, de egy olyan számot, amelyre teljesülnek a feltételek, és ezt ellenőrzi is, legfeljebb 1 pontot kaphat. Ha a versenyző a második megoldáshoz hasonló módon oldja meg a feladatot, de további magyarázat nélkül leírja a különböző számjegyekkel kezdődő legnagyobb megfelelő számokat, majd kiválasztja közülük a legnagyobbat, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat. Ha csak a 9-cel, 8-cal és 7-tel kezdődő legnagyobb megfelelő számokat írja fel, és további magyarázat és vizsgálódás nélkül helyes választ ad, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

3. Három pozitív egész szám szorzata hatszorosa az összegüknek. A három szám közül a legnagyobb egyenlő a másik két szám összegével. Mennyi lehet a három szám szorzata?

Megoldás:

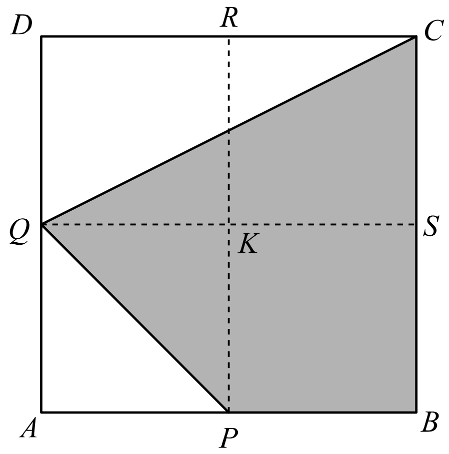
Legyen a két kisebb pozitív egész szám a és b, ahol $a \le b$, így a harmadik szám $a+b$. 1 pont
Mivel a három szám összege $a+b+(a+b)=2\cdot(a+b)$, 1 pont
ezért a feladat feltételei alapján felírhatjuk a következő egyenletet:
$a\cdot b\cdot(a+b)=12\cdot(a+b)$. 2 pont
Az egyenletet a pozitív $a+b$ számmal osztva a következőt kapjuk: 1 pont
$ab=12$. 1 pont
A 12 háromféleképpen írható fel két pozitív egész szám szorzataként: $1\cdot 12$; $2\cdot 6$; $3\cdot 4$. 1 pont
Az egyes esetekben a harmadik szám értéke rendre 13; 8; 7. 1 pont
A három szám szorzata ennek 12-szerese, tehát 156; 96 vagy 84 lehet. 2 pont

Összesen: 10 pont

További útmutató a javító tanároknak:
A helyes válaszok indoklás nélküli közléséért 2 pont adható. Ha a három lehetséges szorzat közül a versenyző csak egyet vagy kettőt talál meg, akkor ezért 1 pontot adjunk. További 1 pont adható akkor, ha a versenyző ellenőrzi a feladat feltételeinek teljesülését is.

4. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának felezőpontja P, az AD oldal felezőpontja Q. Mekkora a négyzet területe, ha a $QPBC$ négyszög területe 15 cm^2?

Első megoldás:



Készítsünk ábrát. 1 pont

Legyen a BC és a CD oldal felezőpontja rendre S és R, a PR és QS középvonalak metszés pontja K.

A QS középvonal felezi a négyzet területét, vagyis a $QSCD$ téglalap területe is egyenlő az $ABCD$ négyzet területének a felével. 1 pont

A QC átló felezi a $QSCD$ téglalap területét, így a QSC háromszög területe az $ABCD$ négyzet területének a negyede. 1 pont

A PR és QS középvonalak az $ABCD$ négyzetet négy egyenlő területű négyzetre darabolják, ezért az $APKQ$ és a $PBSK$ négyzet területe is az $ABCD$ négyzet területének a negyede. 1 pont

A PQ átló felezi az $APKQ$ négyzet területét, ezért a PKQ háromszög területe nyolcada az $ABCD$ négyzet területének. 1 pont

A $QPBC$ négyszög területe a QPK háromszög, a $PBSK$ négyzet és a QSC háromszög területének az összege, vagyis az $ABCD$ négyzet területének az $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ része. 2 pont

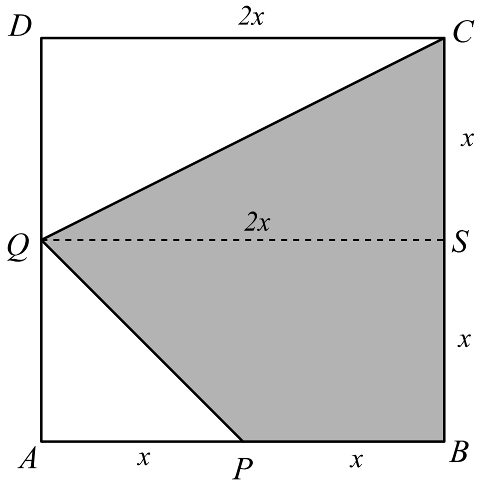
Ha az $ABCD$ négyzet területének a $\frac{5}{8}$ része 15 cm^2, akkor az $\frac{1}{8}$ része 3 cm^2, 1 pont

tehát az egész négyzet területe ennek a 8-szorosa, vagyis 1 pont

az $ABCD$ négyzet területe 24 cm^2. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:



Készítsünk ábrát. 1 pont

Legyen *BC* oldal felezőpontja *S*, a négyzet oldalának hossza $2x$. 1 pont

A *QPBC* négyszöget a négyzet *QS* középvonala a *PBSQ* derékszögű trapézra és a *QSC* derékszögű háromszögre osztja. 1 pont

Mivel $t_{PBSQ} = \frac{x+2x}{2} \cdot x = \frac{3}{2}x^2$ 1 pont

és $t_{QSC} = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2$, 1 pont

ezért a *QPBC* négyszög területe $t_{QPBC} = t_{PBSQ} + t_{QSC} = \frac{3}{2}x^2 + x^2 = \frac{5}{2}x^2$. 1 pont

Mivel $t_{QPBC} = \frac{5}{2}x^2 = 15\ \text{cm}^2$, ezért $5x^2 = 30\ \text{cm}^2$, tehát $x^2 = 6\ \text{cm}^2$. 2 pont

Az *ABCD* négyzet területe $t_{ABCD} = (2x)^2 = 4x^2$, 1 pont

ezért az *ABCD* négyzet területe $4 \cdot 6 = 24\ \text{cm}^2$. 1 pont

Összesen: 10 pont

További útmutató a javító tanároknak:

Ha a versenyző szöveges magyarázat nélkül, de helyesen beírja az ábrába, hogy az egyes részek területe hányad része a négyzet területének, majd helyes választ ad, akkor legfeljebb 6 pontot kaphat.

Természetesen a fehér részek területének kiszámolásával is megoldható a feladat: Az *APQ* háromszög területe nyolcada, a *QCD* háromszög területe pedig negyede az *ABCD* négyzet területének, így a fehér részek területének összege az *ABCD* négyzet területének $\frac{3}{8}$ része, ezért a szürke négyszög területe az *ABCD* négyzet területének $\frac{5}{8}$ része.

5. Egy dobozban 2019 darab golyó van. Köztük ugyanannyi a piros, mint amennyi a zöld, a többi golyó pedig fehér. 1431 darab golyót kell kivennünk a dobozból ahhoz, hogy biztosan legyen a kivett golyók között mindhárom féle színűből legalább egy darab. Hány fehér golyó van a dobozban?

Első megoldás:

1431 darab golyót kell kivennünk a dobozból ahhoz, hogy biztosan legyen a kivett golyók között mindhárom féle színűből legalább egy darab, tehát maximum 1430 darabot lehet úgy kivenni, hogy a kivett golyók között csak kétféle színű golyó legyen. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy amilyen színű golyóból eddig egyetlen darab sem került még elő, abból $2019 - 1430 = 589$ darab volt a dobozban. 2 pont

Ha piros golyóból volt 589 darab, akkor zöldből is, ekkor a fehér golyók száma $2019 - 2 \cdot 589 = 841$ darab. 1 pont

Ugyanez a helyzet, ha zöld golyóból maradt a dobozban 589 darab. 1 pont
De lehetett a fehér golyók száma is 589 darab, 1 pont
ekkor a pirosak és a zöldek száma $(2019-589):2=715$ darab. 1 pont
A dobozban 589 vagy 841 darab fehér golyó van. 2 pont
Ellenőrzés: Ha 589 piros, 589 zöld és 841 fehér golyó van, akkor $589+841+1=1431$ darab golyót kell kivenni ahhoz, hogy legyen a kivettek között mindhárom színű.
Ha 715 piros, 715 zöld és 589 fehér golyó van, akkor $715+715+1=1431$ darab golyót kell kivenni ahhoz, hogy legyen a kivettek között mindhárom színű. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Legyen a piros, illetve a zöld golyók száma x, ekkor a fehérek száma $2019-2x$. 1 pont
Ha már kihúztuk az összes piros és zöld golyót, és az 1431-edik volt az első fehér, akkor felírható a következő egyenlet:

$x+x+1=1431.$ 1 pont

Összevonás után az egyenlet mindkét oldalából 1-et kivonva, 2-vel való osztás után kapjuk, hogy $x=715$, 1 pont
ekkor a fehér golyók száma $2019-2\cdot 715=589$. 1 pont
Ha már kihúztuk az összes fehér golyót és még valamelyik színűből az összeset, és az 1431-edik volt az első a harmadik színűből, akkor felírható a következő egyenlet:

$x+2019-2x+1=1431.$ 1 pont

Összevonás után kapjuk, hogy

$2020-x=1431,$

ahonnan az egyenlet mindkét oldalához x-et hozzáadva és 1431-et kivonva kapjuk, hogy

$589=x.$ 1 pont

Ebben az esetben a fehér golyók száma $2019-2\cdot 589=841$. 1 pont
A dobozban 589 vagy 841 darab fehér golyó van. 2 pont
Ellenőrzés: Ha 589 piros, 589 zöld és 841 fehér golyó van, akkor $589+841+1=1431$ darab golyót kell kivenni ahhoz, hogy legyen a kivettek között mindhárom színű.
Ha 715 piros, 715 zöld és 589 fehér golyó van, akkor $715+715+1=1431$ darab golyót kell kivenni ahhoz, hogy legyen a kivettek között mindhárom színű. 1 pont

Összesen: 10 pont

További útmutató a javító tanároknak:
A két helyes eredmény indoklás nélküli közléséért csak 2 pont adható. Ha a versenyző indoklás gyanánt ellenőrzést végez, erre kapjon további 1 pontot. Ha a versenyző indoklás nélkül csak az egyik választ adja meg, akkor 1 pontot kapjon; ha ezt ellenőrzi, akkor az ellenőrzésért kapjon további 1 pontot.

* * * * *

Több megoldásból csak egy kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.

A dolgozatok pontszámait a www.mategye.hu honlapon kell rögzíteni 2019. december 10-ig.

Az 1. és 2. kategóriába tartozó versenyzők dolgozatainak továbbküldési pontszáma 25 pont. Ezeket a dolgozatokat legkésőbb 2019. december 10-én postára kell adni a Mategye Alapítvány címére (6001 Kecskemét, Pf. 585).

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg. A második fordulóba továbbjutott tanulók névsora 2019. december 16-tól a www.mategye.hu honlapon megtekinthető, ugyanitt láthatók 2020. január 13-tól a második forduló helyszínei is.

A második fordulóba csak olyan tanuló juthat, akinek határidőig rögzítésre került a pontszáma, és határidőig elküldésre került a dolgozata.

Köszönjük a munkájukat!

Kecskemét, 2019. november 26. *A Szervezőbizottság*