Tanárverseny – 2012

középiskolában tanító tanároknak

Megoldásvázlatok

Kidolgozta:
Csordásné Szécsi Jolán, Csordás Péter

A verseny támogatói:

Typotex Kiadó **Maxim Kiadó** **MATEGYE Alapítvány**

1. Mennyivel egyenlő a $K \cdot E \cdot D \cdot V \cdot E \cdot N \cdot C \cdot Ü \cdot N \cdot K \cdot P \cdot É \cdot C \cdot S$ műveletsor eredménye, ha a benne szereplő azonos betűk azonos számjegyet, a különböző betűk különböző számjegyet jelölnek?

(A) *0* **(B)** *7!* **(C)** *8!* **(D)** *9!* **(E)** *10!*

Megoldás

A műveletsorban összesen 10 különböző betű szerepel, így minden számjegy előfordul. Mivel az egyik szorzótényező a 0, ezért a szorzat eredménye 0.

2. Mennyi annak a számrendszernek az alapszáma, amelyben $231_x \cdot 11_x = 3041_x$, ahol x a számrendszer alapszáma?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Megoldás

Ebben a számrendszerben a $2310 + 231$ összeg 3041-gyel egyenlő. A két számot összeadva kapjuk, hogy ebben a számrendszerben $3 + 2 = 10$, ezért a számrendszer alapszáma 5.

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

3. Melyik a legnagyobb egész szám, amely kisebb, mint $\dfrac{3+3\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{15}-3\sqrt{7}-\sqrt{21}}{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Megoldás

A számlálót szorzattá alakítva kapjuk, hogy $\dfrac{\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \left(3+\sqrt{3}\right)$. Mivel $1 < \sqrt{3} < 2$, ezért a keresett szám a 4.

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

4. Mennyi a p értéke, ha az $ABCD$ paralelogramma esetén
$2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 4 \cdot \overrightarrow{CD} + 3 \cdot \overrightarrow{DA} = p \cdot \overrightarrow{AC}$?

(A) *–3* **(B)** *–2* **(C)** *–1* **(D)** *1* **(E)** *2*

Megoldás

$2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 4 \cdot \overrightarrow{CD} + 3 \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + 2\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) =$
$= \vec{0} + \vec{0} + 2\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) = 2 \cdot \overrightarrow{CA} = -2 \cdot \overrightarrow{AC}$. Így a p értéke –2.

5. Ha tegnap szerda lett volna, akkor 72 óra múlva éppen az a napja lenne a hétnek, amelyik valójában holnapután lesz. Milyen nap lesz holnapután?

(A) *szerda* **(B)** *csütörtök* **(C)** *péntek* **(D)** *szombat*
(E) *vasárnap*

Megoldás

Ha tegnap szerda lett volna, akkor ma csütörtök, ami után 72 órával vasárnap lenne. Tehát a feladat szövege szerint holnap után vasárnap lesz.

6. Melyik kifejezéssel egyenlő az $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$, ha $a > 1$?

(A) *1* **(B)** a **(C)** $\lg a$ **(D)** $a^{\lg a}$ **(E)** $a \cdot \lg a$

Megoldás

Legyen $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}=z$ (>0), akkor $\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}\cdot\lg a=\lg z$, ahonnan $z=\lg a$ (vagy új alapú logaritmusra átírás gondolatával).

7. Egy játék megvásárlásához Daninak 51, Dórinak 1 petákja hiányzott. Pénzüket összeadták, de az így sem lett elegendő a játék megvásárlásához. Hány petákba került a játék, ha mindkét gyereknek egész számú petákja volt?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *51* **(D)** *52* **(E)** *53*

Megoldás

A játék megvásárlásához Dórinak 1 petákja hiányzott. Ehhez hozzáadva Dani petákjait, sem lett elegendő a pénzük a játék megvásárlásához, ezért Daninak egyetlen petákja sem volt. Mivel Daninak 51 petákja hiányzott a játék megvásárlásához, ezért a játék 51 petákba került.

8. Hány olyan rendezett $(a;b)$ számpár van, amelyre $a^b=b^a$, ha $a;b\in\{0;1;2;4\}$?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Megoldás

A megoldások: $a=1$, $b=1$; $a=2$, $b=2$; $a=4$, $b=4$; $a=2$, $b=4$; $a=4$, $b=2$.

9. Mennyivel egyenlő $5^{2012}-4\cdot5^{2011}-4\cdot5^{2010}-...-4\cdot5^2-4\cdot5$?

(A) *–5* **(B)** *0* **(C)** *5* **(D)** *25* **(E)** *125*

Megoldás

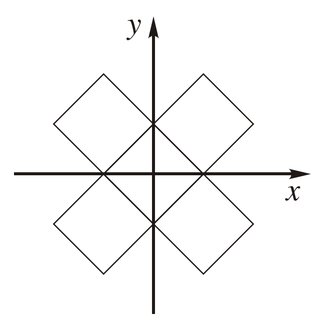
A tagokból $4\cdot5$-öt kiemelve kapjuk, hogy $5^{2012}-4\cdot5(5^{2010}+5^{2009}+...+5+1)=$ $=5^{2012}-4\cdot5(5^{2011}-1):4=5^{2012}-5(5^{2011}-1)=5$.

10. Hány egybevágó négyzet helyezhető el a koordináta-rendszerben úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös belső pontja, és mindegyik négyzet kerületén legyen mindkét koordináta-tengelynek pontja, ha a lehető legtöbbet helyezzük el?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Megoldás

Lásd ábra!



11. Hány egész megoldása van az $\left|x^2-26\right|=p$ egyenletnek, ha a megoldások száma a lehető legnagyobb?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2*

(D) *3* **(E)** *4*

Megoldás

Mivel $x^2-26=p$ vagy $x^2-26=-p$ ezért legfeljebb 4 lehet a megoldások száma. A $p=10$ esetén például van is 4 megoldás: $x_1=6$; $x_2=-6$; $x_3=4$; $x_4=-4$.

12. Hány olyan n természetes szám van, amelyre n^2+10n négyzetszám?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

Megoldás

Az $n^2\le n^2+10\le(n+5)^2$ (ha $n\in N$). Innen $n=0$ és $n=8$ esetén adódik megoldás.

13. Véletlenszerűen egymás után írjuk a négy évszak nevét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a felírás sorrendje megegyezik azzal, ahogy az évszakok a valóságban követik egymást?

(A) $\frac{1}{24}$ **(B)** $\frac{1}{12}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{1}{6}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

Megoldás

Az összes lehetséges sorrend 24, amiből 4 sorrend megfelelő, mert nincs kikötve, hogy melyiktől kezdjük el sorrendben felírni őket. Így a keresett valószínűség $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

14. Az x_1, x_2, ..., x_n 1-nél kisebb abszolút értékű valós számok. Mennyi lehet az n legkisebb értéke, ha $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = 2013 + |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|$?

(A) *2011* **(B)** *2012* **(C)** *2013* **(D)** *2014* **(E)** *4024*

Megoldás

Mivel $|x_i| < 1$, ezért $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| < n$, így $2013 + |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| < n$. A legkisebb n érték tehát 2014. Ez meg is valósulhat például ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1007} = \frac{2013}{2014}$ és $x_{1008} = x_{1009} = \ldots = x_{2014} = -\frac{2013}{2014}$.

15. András és Balázs egyszerre indul gyalog *A*-ból *B*-be. András minden kilométernyi utat 5 perccel rövidebb idő alatt tesz meg, mint Balázs. András az út negyed részének megtétele után visszafordul *A*-ba, és ott 30 percet időzik, majd ismét indul *B*-be, ahová Balázzsal egy időben érkezik. Mennyi az *AB* távolság kilométerben mért hosszában a mérőszám számjegyeinek szorzata, ha az *AB* távolságot Balázs 4,5 óra alatt teszi meg?

(A) *0* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *6* **(E)** *8*

Megoldás

András a teljes út másfélszeresét teszi meg 4 óra = 240 perc alatt. Így ő a teljes távot 160 perc alatt tenné meg.Balázs ugyanezt a távot 4 és fél óra = 270 perc alatt teszi meg. Így a keresett távolság $(270 - 160)/5 = 22$ kilométer.

16. Egy szabályos hétszög csúcsait piros, fehér vagy zöld színűre festjük. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? (A hétszög középpontja körüli forgatással egymásba vihető festések nem különbözőek.)

(A) *315* **(B)** *729* **(C)** *2180* **(D)** *2187*
(E) *Az előzőek közül egyik sem.*

Megoldás

A szabályos hétszög minden csúcsa három különböző színre festhető, így 3^7 lehetőség lenne, ha a csúcsok sorszámozottak lennének. Mivel a forgatással egymásbavihető színezések nem különbözőek és a 7 prímszám, ezért a többszínűek hetedrészéhez a három egyszínűt hozzáadva adódik a megoldás. Így $\frac{3^7 - 3}{7} + 3 = 315$.

17. Hányféleképpen olvasható ki az ábrából a RÁTZ LÁSZLÓ név, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk, és kettőnél többször nem léphetünk egymás után ugyanabba az irányba?

R Á T Z L Á S Z L Ó
Á T Z L Á S Z L Ó
T Z L Á S Z L Ó
Z L Á S Z L Ó
L Á S Z L Ó
Á S Z L Ó
S Z L Ó
Z L Ó
L Ó
Ó

(A) *45* **(B)** *55* **(C)** *90* **(D)** *110* **(E)** *120*

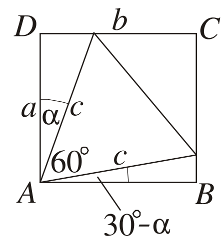
Megoldás

A RÁTZ LÁSZLÓ név kiolvasásához az R betűtől indulva összesen 9 lépést kell megtenni két irányt használva (jobbra - J, lefelé - L). Ugyanabba az irányba egymás után 1 vagy 2 lépést tehetünk. Így egy lépéssorozatot leírhatunk úgy egy számmal, hogy minden számjegye az irányváltások között azonos irányba megtett lépések számát jelöli (például: 22111 jelenti JJLLJLJ vagy LLJJLJL kiolvasásokat). A feltételek szerint olyan számokat keresünk, amelyek-nek minden számjegye 1-es vagy 2-es és számjegyeinek összege 9. Ilyen szám összesen $2\cdot\left(\binom{9}{0}+\binom{8}{1}+\binom{7}{2}+\binom{6}{3}+\binom{5}{4}\right)=110$ van, így 110-féleképpen lehet kiolvasnia RÁTZ LÁSZLÓ nevet.

18. Az *ABCD* téglalapba lehet olyan szabályos háromszöget írni, amelynek egyik csúcsa *A*, a másik két csúcsa a *BC*, illetve a *CD* oldalra illeszkedik. Mennyi lehet a téglalap két szomszédos oldalhosszának az aránya, ha az a lehető legkisebb?

(A) $\sqrt{2}:2$ **(B)** $\sqrt{6}:3$ **(C)** $\sqrt{3}:2$ **(D)** $2:\sqrt{5}$ **(E)** $1:\sqrt{3}$

Megoldás



Az ábra alapján $\frac{a}{c}=\cos\alpha$ és $\frac{b}{c}=\cos(30°-\alpha)$. Ebből $\frac{b}{a}=\frac{\cos(30°-\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{\cos 30°\cdot\cos\alpha+\sin 30°\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$. Mivel $\mathrm{tg}\,\alpha\geq 0$, így $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\frac{b}{a}$.

19. Melyik állítás igaz, ha $S=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}$?

(A) $1<S<2$ **(B)** $S=2$ **(C)** $2<S<3$ **(D)** $S=3$ **(E)** $3<S$

Megoldás

Ha az *S* összegből levonjuk a felét, és alkalmazzuk a végtelen mértani sorra vonatkozó összefüggést, akkor 1-et kapunk, így $S=2$.

20. Számítógéppel kinyomtattuk a 2^{2012} és az 5^{2012} hatványértékeket. Hány számjegyet írt le összesen a nyomtató?

(A) *2011* **(B)** *2012* **(C)** *2013* **(D)** *2014* **(E)** *4024*

Megoldás

Jelöljük a 2^{2012} számjegyeinek számát *m*-mel, az 5^{2012} számjegyeinek számát pedig *n*-nel! Ekkor $10^{m-1}<2^{2012}<10^{m}$ és $10^{n-1}<5^{2012}<10^{n}$. Összeszorozva a két egyenlőtlenséget a $10^{m+n-2}<2^{2012}\cdot 5^{2012}<10^{m+n}$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ezt átalakítva $10^{m+n-2}<10^{2012}<10^{m+n}$ egyenlőtlenséghez jutunk, amiből $m+n-2< <2012<m+n$. Mivel *m*

és n egész számok, ezért az egyenlőtlenség csak $m+n=2013$ esetén igaz. Tehát a nyomtató összesen 2013 számjegyet írt le.

21. Melyik számjegy áll az $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2011}{2012!}$ összeg tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 2012. helyen?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *8* **(E)** *9*

Megoldás

Mivel $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$, ezért az $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2011}{2012!}=1-\frac{1}{2012!}$. A $2012!>10^{2700}$, így $\frac{1}{2012!}<10^{-2700}$. Az összeg tizedestört alakjában a tizedesvessző után tehát több, mint 2700 db 0 számjegy lesz, így az $1-\frac{1}{2012!}$ különbségben a tizedesvessző után a 2012. helyen a 9 számjegy áll.

22. Az ABC háromszögben a $CBA\sphericalangle=45°$. A BC oldal egy P pontjára igaz, hogy $BP:PC=1:2$ és $CPA\sphericalangle=60°$. Hány fok az ACB szög nagysága?

(A) *72,5* **(B)** *75* **(C)** *80* **(D)** *82,5* **(E)** *85*

Megoldás

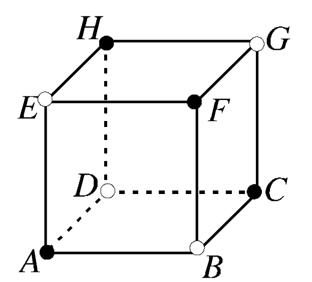
Kössük össze P-t az A-val, és erre bocsássunk merőlegest C-ből! Az így kapott talppontot jelöljük T-vel! PCT háromszög félszabályos. Ebből TBP egyenlőszárú, majd ABT is egyenlőszárú. Amiből következik, hogy CAT is egyenlőszárú, így $TB=TA=TC$. Ebből adódik, hogy CTA egyenlőszárú derékszögű, így BCA szög $=30^\circ+45^\circ=75^\circ$.

23. Egy kocka egyik csúcsában egy pontszerű róka van. Három vadász egyidejűleg egy-egy pontos lövést ad le, ezek eltalálják a kocka három csúcsát (ez egy sorozat). Egy lövés akkor találja el a rókát, ha olyan csúcsot talál el, ahol a róka éppen van. Ha egy sorozat három lövésének egyike sem találja el a rókát, akkor az a következő sorozat előtt átfut egy él mentén a három szomszédos csúcs egyikébe. Legkevesebb hány - alkalmasan megválasztott - sorozatot kell leadni a három vadásznak, hogy a végig láthatatlan rókát egy lövés biztosan eltalálja?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6*

(E) *A vadászok nem biztos, hogy eltalálják a rókát, bármennyi sorozatot adnak is le.*

Megoldás



Színezzük a kocka négy nem szomszédos csúcsát például az A, C, F és H csúcsokat feketére, a többit pedig fehérre (lásd ábra)! Ezzel a kocka bármely két szomszédos csúcsa különböző színű lett. Amíg a vadászok a rókát nem találják el, addig az minden sorozat után más színű csúcsba fut, mint amilyenben a sorozat előtt volt. Legyen az első sorozat az ACF! (Ezek a csúcsok nem szomszédosak és azonos színűek.) Ha a róka kezdetben fekete csúcsban van, akkor vagy eltalálták, vagy a H csúcsban van. A H csúcsból az első sorozat után átfut a D, E, G fehér csúcsok egyikébe. Legyen a második sorozat a DEG! Ha a róka fekete csúcsban volt az első sorozat előtt, akkor ez a két sorozat biztosan eltalálja. Ha a róka az első sorozat előtt fehér csúcsban volt, akkor a két sorozat után ismét valamelyik fehér csúcsban van. Legyen a harmadik sorozat a DEG! Ekkor ez a sorozat vagy eltalálta a rókát, vagy az a B csúcsban volt. A kocka B csúcsából a harmadik sorozat után az A, C, F csúcsok valamelyikébe fut a róka. Ezért legyen a negyedik sorozat az ACF! Ha a róka az első sorozat előtt fehér csúcsban volt, akkor az előbbi négy sorozattal biztosan eltalálják a vadászok. Így bármelyik csúcsban is volt kezdetben a róka, 4 alkalmasan megválasztott sorozattal a vadászok biztosan eltalálják.

24. Hány megoldása van a $2x^4+4x^3+11x^2+9x+10=0$ egyenletnek a valós számok halmazán?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

Megoldás

Az egyenlet bal oldala: $2x^4+4x^3+11x^2+9x+10=9(x^2+x+1)+2x^2(x^2+2x+1)+1>0$, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

25. Egy 6×6-os négyzetrács 36 fehér négyzetét sárgára átfestjük úgy, hogy egyszerre egy négyzetet festünk át, majd a négyzetre ráírjuk, hogy az adott négyzettel oldallal szomszédos négyzetek közül már hány sárga színű. Ezután addig folytatjuk a festést és a számok írását, míg az összes négyzet sárga színű nem lesz, és minden négyzetre rákerül a megfelelő szám. Mennyi a négyzetekre írt számok összege?

(A) *30* **(B)** *60* **(C)** *90* **(D)** *120*
(E) *A színezés sorrendjétől függ.*

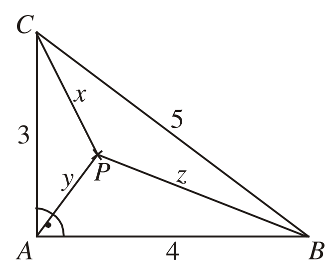
Megoldás

A táblázat 36 négyzetének 60 olyan oldala van, amelyik több négyzetnek oldala, mindegyik pontosan két négyzetnek. Két közös oldallal rendelkező négyzet közül az egyiket előbb színezzük be, mint a másikat. Vegyük azt a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést, melynél minden egyes közös oldalhoz hozzárendeljük az őt határoló, később beszínezett négyzetet! Az összes négyzet beszínezése után a négyzetekben lévő számok összege egyenlő a közös oldalak számával, azaz 60-nal.

26. Mennyi az $xy+yz+zx$ összeg, ha x, y és z olyan pozitív valós számok, amelyekre teljesülnek az $x^2+xy+y^2=9$, az $y^2+yz+z^2=16$ és a $z^2+zx+x^2=25$ egyenletek?

(A) $8\sqrt{3}$ **(B)** $9\sqrt{2}$ **(C)** $9\sqrt{3}$ **(D)** $10\sqrt{2}$ **(E)** $16\sqrt{3}$

Megoldás



A megadott három egyenlet mindegyike tekinthető úgy, mint egy-egy olyan háromszögre felírt koszinusz tétel, melynél egy belső szög 120°. Az egyik x, y és 3 egység oldalú, a másik y, z és 4 egység oldalú, a harmadik x, z és 5 egység oldalú. Tekintsük a 3, 4 és 5 egység oldalú háromszöget és belsejében azt a P pontot, melyből mindhárom oldal 120°-os szögben látszik (lásd ábra)! Ekkor az ABP, BCP és APC háromszögekre a koszinusz tétel: $9 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 120°$; $16 = = y^2 + z^2 - 2zy \cdot \cos 120°$; $25 = x^2 + z^2 - 2zx \cdot \cos 120°$, amelyek azonosak a három megadott egyenlettel. Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva: $T = \frac{xy \cdot \sin 120°}{2} + \frac{xz \cdot \sin 120°}{2} + \frac{yz \cdot \sin 120°}{2} =$ $= \frac{3 \cdot 4}{2}$, innen $xy + xz + yz = \frac{12}{\sin 120°} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$.

27. Mennyi a számjegyek összege a legnagyobb olyan számban, amely nem állítható elő 2012 összetett szám összegeként?

(A) *14* **(B)** *15* **(C)** *18* **(D)** *19* **(E)** *21*

Megoldás

A legkisebb összetett szám a 4. Így a legkisebb előállítható szám a 8048. A legnagyobb nem előállítható páros szám a 8044. A legkisebb páratlan összetett szám a 9. Így a legkisebb előállítható páratlan a 8053, és a nagyobb nem előállítható szám a 8051, amiben a számjegyek összege 14.

28. Melyik kifejezés értékét lehet egyértelműen megadni, ha $a^2+b^2+3a^2b=10a^2b^2+3ab^2+2ab$, ahol $0<a<b$ valós számok?

(A) *ab(a–b)* **(B)** $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ **(C)** $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ **(D)** $\frac{ab-1}{a+b}$ **(E)** $\frac{a+b}{a-b}$

Megoldás

Az egyenletet átalakítva $(b-a)^2=ab[10ab+3(b-a)]$. Ezt az egyenletet $ab(b-a)$-val leosztva $\frac{b-a}{ab}=10\frac{ab}{b-a}+3$ adódik. Ez $\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ különbségre nézve másodfokú egyenlet,melynek a feltételek mellett egy megoldása van. A többi kifejezés értéke nem egyértelműen meghatározott.

29. Mely esetben van szélsőértéke az $f(x)=\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+a}+\sqrt{bx+c}$ függvénynek, ha a, b és c valós paraméterek?

(A) *$a=7$, $b=-7$, $c=-9$* **(B)** *$a=3$, $b=-7$, $c=9$*
(C) *$a=-7$, $b=-9$, $c=2$* **(D)** *$a=-7$, $b=-7$, $c=9$*
(E) *Az előzőek közül egyikben sem.*

Megoldás

A számtani és négyzetes közép közötti összefüggés alapján $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+a}+\sqrt{bx+c}\le 3\cdot\sqrt{\frac{(2+5+b)x+3+a+c}{3}}$. A szélsőérték létének feltétele, hogy $2+5+b=0$ legyen, valamint $\sqrt{2x+3}=\sqrt{5x+a}=\sqrt{bx+c}$, ami a megadott válaszok közül $a=7$, $b=-7$ és $c=-9$ esetén teljesül.

30. Jelölje S_n a természetes számok négyzetösszegét 1-től n-ig, ahol n tetszőleges háromjegyű természetes szám! Kiszámoljuk az összes S_n szám 4-gyel való osztási maradékát. Melyik maradék gyakorisága a legnagyobb?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3*
(E) *Mindegyik maradéknak ugyanannyi a gyakorisága.*

Megoldás

Az $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, így a 4-gyel való oszthatóság miatt n-et a 24-gyel való oszthatóság alapján célszerű vizsgálni. Ha $n=24k$, akkor S_n 4-gyel osztva 0 maradékot ad. Ha $n=24k+m$ ($m=1$; 2; 3;...; 23) akkor a számláló tényezőinek 24-gyel való osztási maradékai szorzata hatod részének 4-gyel való osztási maradékát kell vizsgálnunk. A maradékok 3, 3, 0, 0, 1, 1, 2, 2 periódus szerint nyolcassával ismétlődnek. A $n=100=24k+4$ esetén 2 a maradék, $n=101$ esetén a maradék 3. Ezek alapján kiszámítható, hogy a 3-as maradék gyakorisága a legnagyobb.