

10. osztály - gimnázium

1. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $x^5 - 16x = 0$
 b) $||x| - 2| = 1$

Megoldás:

a) Szorzattá alakítva az egyenletet:

$x(x^4 - 16) = 0$, amiből

$x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$ és

$x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha legalább egyik szorzótényezője 0.

Így $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Mivel $x^2 + 4 \geq 4$, ezért nincs több megoldás.

Ellenőrzés

b) $||x| - 2| = 1$

Az abszolútérték definíciója alapján

$|x| - 2 = 1$ vagy $|x| - 2 = -1$, amiből

$|x| = 3$ vagy $|x| = 1$.

A megoldás: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$ vagy $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

Ellenőrzés

Összesen:

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

10 pont

2. Hány olyan természetes szám van, amely számjegyeinek szorzata 2016? Melyik ezek közül a legkisebb?

Megoldás:A 2016 prímtényezősz felbontása: $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.Mivel $2^5 = 32$, ezért a 2^5 -t mindenképp tovább kell bontani számjegyekre.

Erre 4 lehetőség van.

A $2^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ alapján a számjegyek 4; 2; 2; 2,a $2^3 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 2 \cdot 2$ alapján a számjegyek 8; 2; 2,a $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 = 4 \cdot 4 \cdot 2$ alapján a számjegyek 4; 4; 2és $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4$ alapján a számjegyek 8 és 4.Mindegyik felbontáshoz a $3^2 = 9$ vagy a 3; 3 és a 7 kerül.

Bármely szorzathoz akárhány 1-es szorzótényező írható, így végtelen sok olyan szám van, melyekben a számjegyek szorzata 2016.

A fenti szorzatok közül a legkevesebb számjegyet tartalmazó számok számjegyei:

$2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $3^2 = 9$ és 7.

A legkisebb számot akkor kapjuk, ha a legkevesebb számjegyet tartalmazó szám számjegyei növekvő sorrendben követik egymást.

Így a legkisebb olyan szám, mely számjegyeinek a szorzata 2016, a 4789.

Összesen:

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

10 pont

3. Melyek azok az
- $\overline{abc}$
- alakú háromjegyű természetes számok, amelyekre
- $\overline{1ab} = \overline{ab} \cdot c$
- teljesül?

Megoldás:

Az egyenletet helyiértékesen átírva:

$100 + 10a + b = (10a + b) \cdot c$, ezt rendezve

$100 = (10a + b) \cdot c - (10a + b)$, amiből

$100 = (10a + b)(c - 1)$.

Mivel $c - 1 \leq 8$, így a 100-at olyan kéttényezős szorzatra kell bontani, melyben az egyik tényező nem nagyobb, mint 8.

Így $100 = 100 \cdot 1 = 50 \cdot 2 = 25 \cdot 4 = 20 \cdot 5$ adódik.

A $10a + b = 100$ nem ad megoldást, mert $10a + b \leq 99$.A $10a + b = 50$ egyenletből $a = 5$, $b = 0$ és $c = 3$ adódik.A $10a + b = 25$ egyenletből $a = 2$, $b = 5$ és $c = 5$ adódik.A $10a + b = 20$ egyenletből $a = 2$, $b = 0$ és $c = 6$ adódik.

A keresett számok tehát az 503, a 255 és a 206.

Ellenőrzés: $150 = 50 \cdot 3$; $125 = 25 \cdot 5$ és $120 = 20 \cdot 6$.

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

1 pont

10. osztály - gimnázium

Összesen:

10 pont

4. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes szám esetén az $n^{2016} - n^{2012}$ különbség osztható 30-cal!

Megoldás:

A különbséget szorzattá alakítva:

$$n^{2016} - n^{2012} = n^{2012}(n^4 - 1) = n^{2012}(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^{2012} \cdot (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1).$$

2 pont

Egy szám pontosan akkor osztható 30-cal, ha a szám osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel.

(A 2; 3 és 5 páronként relatív prímek.)

1 pont

Mivel $n - 1$; n ; $n + 1$ egymás utáni három egész szám, így valamelyik páros és valamelyik osztható 3-mal.

1 pont

Ha n osztható 5-tel, akkor igaz az állítás.

1 pont

Ha n 5-tel osztva 1 maradékot ad, akkor $n - 1$ osztható 5-tel.

1 pont

Ha n 5-tel osztva 2 maradékot ad, akkor $n^2 + 1$ osztható 5-tel.

1 pont

Ha n 5-tel osztva 3 maradékot ad, akkor $n^2 + 1$ osztható 5-tel.

1 pont

Ha n 5-tel osztva 4 maradékot ad, akkor $n - 1$ osztható 5-tel.

1 pont

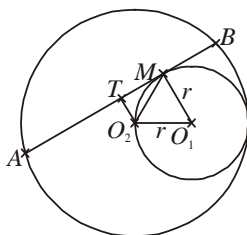
A különbség tehát minden $n \in \mathbb{N}$ -re osztható 30-cal.

1 pont

Összesen:

10 pont

5. Adottak az O_1 középpontú r sugarú és az O_2 középpontú $2r$ sugarú körök, melyek belülről érintik egymást. Legyen M az r sugarú kör egy olyan pontja, amelyre az $MO_1O_2 \sphericalangle = 60^\circ$ teljesül! Az M pontban az r sugarú körhöz húzott érintő a $2r$ sugarú kört az A és B pontokban metszi. Add meg az AB húr hosszát r függvényében!

Megoldás:

1 pont

Mivel $O_2O_1M \sphericalangle = 60^\circ$ és $O_2O_1 = O_1M = r$, ezért az O_2O_1M háromszög szabályos.

1 pont

Az O_1M merőleges AB -re, mert az érintkezési pontba húzott sugár.

1 pont

Ezek alapján $AMO_2 \sphericalangle = 30^\circ$.

1 pont

Legyen az O_2 pontból AB -re bocsátott merőleges talppontja T !Ekkor MTO_2 derékszögű háromszög félszabályos, így $O_2T = \frac{r}{2}$.

1 pont

Az $AO_2 = 2r$, $O_2T = \frac{r}{2}$ és $AO_2 = \frac{AB}{2}$.

1 pont

Az ATO_2 derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt:

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = (2r)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2, \text{ amiből}$$

1 pont

$$\frac{AB^2}{4} = 4r^2 - \frac{r^2}{4},$$

$$AB^2 = 16r^2 - r^2$$

2 pont

és $AB^2 = 15r^2$ adódik.Mivel $AB > 0$, ezért $AB = \sqrt{15} \cdot r$.

1 pont

Összesen:

10 pont

6. Oldd meg az $\frac{1}{x-2016} + \frac{1}{y-2016} = 1$ egyenletet, ahol $x, y \in \mathbb{Z}$!

Megoldás:Az egyenletet $x = y = 2016$ esetén nem értelmezett.

1 pont

10. osztály - gimnázium

Legyen $a=x-2015$, $b=y-2016$!	1 pont
Így az egyenlet $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ alakú, ezt átalakítva:	1 pont
$b+a=ab$, amely $ab-a-b+1=1$ alakba írható.	1 pont
Az egyenlet bal oldalának szorzat alakja: $(a-1)(b-1)=1$.	2 pont
Két egész szám szorzata csak úgy lehet 1, ha vagy mindkét tényező 1, vagy mindkettő -1 .	1 pont
Így $a-1=1$ és $b-1=1$ alapján $a=b=2$, így $x=y=2018$.	1 pont
Az $a-1=-1$ és $b-1=-1$ alapján $a=b=0$, így $x=y=2016$ adódik, ami nem megoldás, mert nem eleme az értelmezési tartománynak.	1 pont
Összesen:	10 pont

* * * * *

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (a jobb) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 60 pont.

Kecskemét, 2016. október 24.

A Szervezőbizottság