1. Oldd meg az alábbi feladatokat!

a) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely középpontjának koordinátái $(3; -4)$ és sugara 5 egység hosszúságú!

b) Add meg a $\vec{b}$ vektor koordinátáit, ha $\vec{a}\,(4; 3)$ és $\vec{a}+\vec{b}\,(2; 1)$!

c) Mennyi az x értéke, ha $2^x = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5$?

d) Határozd meg a $2x+3y=9$ és $y=5$ egyenletű egyenesek metszéspontját!

e) Mennyi az alsó kvartilise 11 pozitív egész számnak, ha mediánja 6 ?

Megoldás:

a) $(x-3)^2+(y+4)^2=25$	2 pont
b) $\vec{b}\,(-2; -2)$	2 pont
c) 15	2 pont
d) $M\,(-3; 5\,)$	2 pont
e) 1; 2; 3; 4; 5 vagy 6	2 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzés: Az *e)* feladatban, ha a versenyző a lehetséges 6 érték közül legalább 1-et helyesen megad, és rosszat nem ad meg, 1 pontot kapjon.

2. Egy versenyen minden résztvevő minden másik résztvevővel kétszer játszott. Minden mérkőzésen a győztes 2 pontot, a vesztes 0 pontot, döntetlen esetén mindkét versenyző 1 pontot kapott. A verseny végén kiderült, hogy az utolsó helyezett versenyző kivételével minden versenyző pontszáma a közvetlenül mögötte végző versenyző pontszámánál ugyanazzal a páros számmal nagyobb. A győztes 2024 pontot szerzett. Hányan vettek részt a versenyen, ha holtverseny nem volt?

Megoldás:

Legyen a résztvevők száma n, ekkor $n\,(n-1)$ mérkőzést játszottak, így az összes pontszám: $2n\,(n-1)$.	1 pont
Ha az utolsó helyezett pontszáma x, és minden versenyző d ponttal kapott többet, mint a közvetlenül mögötte végző, akkor a pontszámaik összege a létrejövő számtani sorozat összege. Ez alapján a pontszámaik összege: $\frac{[2x+(n-1)\cdot d]\cdot n}{2}$.	1 pont
A két összeg egyenlő: $\frac{[2x+(n-1)\cdot d]\cdot n}{2} = 2\cdot n\cdot(n-1)$.	1 pont
Ebből rendezés után: $2x=(n-1)(4-d)$.	1 pont
Mivel $2x\ge 0$, ezért $4-d\ge 0$, így d párossága miatt $d=2$ vagy 4.	1 pont
A győztes pontszáma: $2024=x+(n-1)d$, így $x=2024-(n-1)d$.	1 pont
Ezt behelyettesítve a másik egyenletbe: $4048=(n-1)(d+4)$.	1 pont
Ha $d=2$, akkor $n\notin \mathbb{Z}^+$, tehát ez nem megoldás.	1 pont
Ha $d=4$, akkor $n=507$. Ez megoldás is. (Minden versenyző mindkétszer legyőzi a mögötte végzőket, és így a pontszámok: 0; 4; 8; …; 2020; 2024)	1 pont
Tehát 507-en vettek részt a versenyen.	1 pont
Összesen:	10 pont

3. A Kovács család gyermekük számára születésekor lakástakarék számlát nyitott 25 éves futamidőre, havi fix 0,5%-os kamatra. Minden hónap elején 20 000 Ft-ot fizettek be, a bank pedig minden hónap végén jóváírta az aktuális kamatot a számlán. Hány forint volt 25 év elteltével a gyermekük számláján?

Megoldás:

1. hónap vége: $20\,000\cdot 1{,}005$ 2. hónap vége: $(20\,000\cdot 1{,}005+20\,000)\cdot 1{,}005$	1 pont
Az $n=25\cdot 12=300$ (hónap).	1 pont
A 300. hónap vége: $(20000\cdot 1{,}005^{299}+20000\cdot 1{,}005^{298}+\ldots+20000)\cdot 1{,}005 =$ $=20000\cdot 1{,}005\cdot(1{,}005^{299}+1{,}005^{298}+\ldots+1)$.	2 pont
A zárójelen belül egy mértani sorozat van, amely estén $a_1=1$; $q=1{,}005$ és $n=300$.	2 pont
Így az összeg: $S_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$, amiből $S_{300}=1\cdot\frac{1{,}005^{300}-1}{1{,}005-1}=693$.	2 pont
Így a megtakarítás: $20\,000\cdot 1{,}005\cdot 693=13929300$.	1 pont
Tehát a Kovács család gyermekének a 25 év elteltével 13 929 300 Ft volt a számláján.	1 pont

Összesen: 10 pont

4. Oldd meg az $x^{\lg \mathrm{tg} x} + x^{\lg \mathrm{ctg} x} = 2$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenlet $x > 0$ és $\mathrm{tg} x > 0$ és $\mathrm{ctg} x > 0$ feltételek mellett értelmezett,

így $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in N$. 1 pont

Legyen $x^{\lg \mathrm{tg} x} = a$, ekkor 1 pont

$x^{\lg \mathrm{ctg} x} = x^{\lg (\mathrm{tg} x)^{-1}} = x^{-\lg \mathrm{tg} x} = a^{-1}$. 1 pont

Így az egyenlet $a + \frac{1}{a} = 2$ alakú, 1 pont

ami $a = 1$ esetén teljesül. 1 pont

Az $x^{\lg \mathrm{tg} x} = 1$, ami $x = 1$ 1 pont

vagy $\lg \mathrm{tg} x = 0$ esetén teljesül. 1 pont

Ha $\lg \mathrm{tg} x = 0$, akkor $\mathrm{tg} x = 1$, 1 pont

így $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, ahol n természetes szám. 1 pont

Az egyenlet értelmezhetőségét figyelembe vége a megoldás $x = 1$ és $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, ahol $n \in N$ 1 pont

---

Összesen: 10 pont

5. Egy derékszögű háromszög területe $12 \cdot \sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$, az α hegyesszögére pedig teljesül, hogy $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

a) Mekkorák a háromszög befogói?
b) Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?

Megoldás:

A háromszög területe $T = \frac{a \cdot b}{2} = 12 \cdot \sqrt{3}$, amiből $a \cdot b = 24 \cdot \sqrt{3}$. 1 pont

Mivel $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$, ezért $c = 2a$ 1 pont

Felírva a Pitagorasz tételt: $a^2 + b^2 = c^2$, ami 1 pont

$c = 2a$ alapján $a^2 + b^2 = 4a^2$. 1 pont

Így $b^2 = 3a^2$, tehát $b = a \cdot \sqrt{3}$. 1 pont

Ezt visszahelyettesítve a területből kapott összefüggésbe: $a^2 \cdot \sqrt{3} = 24 \cdot \sqrt{3}$, 1 pont

amiből $a = 2 \cdot \sqrt{6}$ cm és 1 pont

így $b = 6 \cdot \sqrt{2}$ cm. 1 pont

A háromszög köré írható kör sugara: $R = \frac{c}{2} = a$ alapján 1 pont

$R = 2 \cdot \sqrt{6}$ cm. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Ha a félszabályos háromszögre hivatkozva adja meg c és b értékét a–val kifejezve, akkor is kapja meg a megfelelő pontszámokat.

* * * * *

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlésére csak az eredménynél megadott pontszám adható. Több megoldásból csak egy (a jobb) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.

Kecskemét, 2024. december 2.

A Szervezőbizottság