

1. Oldd meg a következő feladatokat!

- Egy torony árnyéka a vízszintes talajon kétszer olyan hosszú, mint a torony magassága. Hány fokban zár be ekkor a Nap sugara a vízszintes talajjal?
- Sorold fel azokat az 5-tel osztható háromjegyű pozitív egész számokat, amelyek három különböző számjegyet, a 0-t, az 5-öt és a 7-et tartalmaznak!
- Oldd meg az $x^3 - 9x = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!
- Add meg a $\vec{b}$ vektort a koordinátaival, ha $\vec{a} (6; 4)$ és $\vec{a} - \vec{b} (11; 5)$!

Megoldás:

- 27° 2 pont
 - 750; 570, 705 3 pont
 - $x_1 = 0; x_2 = -3; x_3 = 3$ 3 pont
 - $\vec{b} (-5; -1)$ 2 pont
-
- Összesen: 10 pont

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = \sqrt{\sqrt{x-3} + 2}$ egyenletet!

Megoldás:

- Az egyenlet $3 \leq x \leq 5$ feltételnek megfelelő valós számokon értelmezett 1 pont
- Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:
- $x - 3 + 5 - x + 2\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{5-x} = \sqrt{x-3} + 2$, amiből 2 pont
- $2\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{5-x} = \sqrt{x-3}$, 2 pont
- majd újra négyzetre emelve $4(x-3)(5-x) = x-3$. 1 pont
- Innen $x-3=0$ vagy $4(5-x)=1$. 1 pont
- Így $x_1 = 3$ és $x_2 = \frac{19}{4}$. 2 pont
- Ellenőrzés 1 pont
-
- Összesen: 10 pont

3. Lassan 30 éve minden év július második hétvégéjén megrendezik a Bajai Halfőző Fesztivált. Ezen a különböző programok mellett a város főterén baráti társaságok, családok bográcsban halat főznek. Idén három csapat létszámai között az alábbi érdekességek voltak megfigyelhetők:

- a létszámok szorzata 2024;
- a létszámok összege négyzetszám;
- mindhárom csapat legalább 2 fő volt.

Hány fő volt a csapatok létszáma?

Megoldás:

A 2024-et fel kell bontani három egynél nagyobb pozitív egész szám szorzatára.

Mivel $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, ezért a lehetséges számhármakok:

1 pont

			összeg
2	2	506	510
2	4	253	259
2	11	92	105
2	22	46	70
2	23	44	69
4	11	46	61
4	22	23	49
8	11	23	42

8 pont

A számhármakok közül csak a 4; 22; 23 felel meg a második feltételnek, tehát a csapatok 4; 22 és 23 fősek voltak.

1 pont

Összesen: 10 pont

11. osztály - gimnázium

4. Egy négyzet minden oldalát felosztottuk 11 egyenlő részre. Hány olyan háromszög van, amelynek a csúcsai az osztáspontok közül kerülnek ki?

Megoldás:

Két eset lehetséges.

1. eset: Ha a négyzet három oldalán egy – egy háromszög csúcs van. 1 pont

Azt, hogy a négyzet melyik oldalain vannak a háromszög csúcsok, 4 féleképpen választhatjuk ki 1 pont

Az egy négyzet oldalon lévő osztáspontok közül 10 féleképpen választhatjuk ki, hogy melyik lesz a háromszög csúcsa. 1 pont

Így ebben az esetben a lehetséges háromszögek száma: $4 \cdot 10^3 = 4000$. 1 pont

2. eset: Ha a négyzet egyik oldalán két háromszög csúcs van és a harmadik egy másik négyzet oldalon. 1 pont

Azt az oldalt, amelyiken két csúcsa lesz a háromszögnek, 4 féleképpen választhatjuk ki. 1 pont

Az egy oldalon lévő osztáspontok közül a két csúcsot $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ féleképpen választhatjuk ki. 1 pont

A többi három oldalon lévő osztáspontok közül bármelyik lehet a harmadik kiválasztott pont, ez 30 eset. 1 pont

Így a lehetséges háromszögek száma: $4 \cdot 45 \cdot 30 = 5400$. 1 pont

Tehát az osztáspontok összesen $4000 + 5400 = 9400$ háromszöget határoznak meg. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Egy húrtrapézba az oldalait érintő 12 egység sugarú kör írható. A trapéz rövidebbik párhuzamos oldala 16 egység hosszú. Hány egység hosszúak a trapéz ismeretlen oldalai és átlói?

Megoldás:

A trapéz magassága megegyezik a kör átmérőjével,

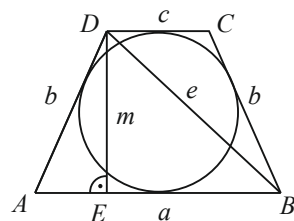
így $m = 2r = 24$ egység.

A trapéz érintőnégyyszög, így $a + c = 2b$, amiből $a = 2b - 16$.

Az AED derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = b^2,$$

$$\text{így } 24^2 + \left(\frac{2b-32}{2}\right)^2 = b^2, \text{ amiből } b = 26, \text{ és } a = 2 \cdot 26 - 16 = 36.$$



1 pont

2 pont

2 pont

1 pont

Az EBD derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt: $m^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = e^2$. 1 pont

Ezek alapján a trapéz átlója: $e = \sqrt{1252} \approx 35,4$. 2 pont

Tehát a trapéz ismeretlen oldalai $a = 36$ és $b = 26$ egység, átlói pedig 35,4 egység hosszúak. 1 pont

Összesen: 10 pont

* * * * *

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése esetén a versenyző csak a válasza adható pontot kaphatja. Több megoldásból csak egy (a jobb) kaphat pontot. Az útmutatóban közltekeltől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.

Kecskemét, 2024. december 2.

A Szervezőbizottság