1. Oldd meg az alábbi feladatokat!

a) Add meg az $\frac{x+8}{x^2+8\cdot x}$ algebrai tört értelmezési tartományát, majd egyszerűsítsd a törtet!

b) Mekkora az egységsugarú kör 270°-os középponti szögéhez tartozó ívének hossza?

c) Döntsd el mind a három egyenlőségről, hogy igaz vagy hamis!

A) $\sqrt{(x-2)^4}=(x-2)^2$ B) $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$ C) $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$

d) Oldd meg a valós számok halmazán az $x^2-4x=0$ egyenletet!

Megoldás:

a) $x\in\mathbb{R}\setminus\{-8;0\}$, $\frac{1}{x}$	3 pont
b) $\frac{3\cdot\pi}{2}$	2 pont
c) A: igaz, B: hamis, C: hamis	3 pont
d) $x_1=0$, $x_2=4$	2 pont
Összesen:	10 pont

2. Határozd meg azt a háromjegyű pozitív egész számot, amelyre a következők teljesülnek:

- a tízes helyi értéken álló számjegye számtani közepe az egyes és a százas helyi értéken álló számjegyének;
- a szám értéke 42,5-szerese a számjegyei összegének;
- ha kivonjuk belőle az első és az utolsó számjegyek felcserélésével kapott számot, akkor 198 lesz az eredmény.

Megoldás:

Legyen a háromjegyű szám: $\overline{abc}$!	1 pont
Az 1. feltétel alapján $2b=a+c$.	1 pont
A 2. feltétel alapján $100a+10b+c=42{,}5(a+b+c)$.	1 pont
A 3. feltétel alapján $100a+10b+c-(100c+10b+a)=198$.	1 pont
A 3. egyenletből $99a-99c=198$, amiből $a-c=2$, így $a=c+2$.	1 pont
Ezt behelyettesítve az első egyenletbe: $b=c+1$.	1 pont
Ezeket behelyettesítve a második egyenletbe:	
$100(c+2)+10(c+1)+c=42{,}5(c+2+c+1+c)$	1 pont
$111c+210=127{,}5c+127{,}5$, amiből $c=5$	1 pont
Így a keresett szám 765.	1 pont
Ellenőrzés	1 pont
Összesen:	10 pont

3. Határozd meg a 72 legkisebb olyan többszörösét, melynek számjegyei között csak a 0 és az 1 szerepel!

Megoldás:

A $72=8\cdot 9$ és $(8;9)=1$, ezért bármely többszöröse is osztható 8-cal és 9-cel.	2 pont
A 8-cal való oszthatóság a szám utolsó három helyi értéken álló számjegyei alapján dönthető el.	1 pont
A számjegyekre vonatkozó feltételek miatt az utolsó három helyi értéken: 000; 001; 010; 100; 011; 101; 110 és111 állhat.	2 pont
Mivel 1000 osztható 8-cal, az 1; 10; 100; 11; 101; 110 és 111 nem, ezért csak a 000 végződés a megfelelő.	1 pont
Mivel a számjegyek között csak 1 és 0 szerepelhet, ezért a 9-cel való oszthatóság szabálya miatt az 1-esek száma $9k$ (k pozitív egész).	3 pont
Így a legkisebb megfelelő szám: 111111111000.	1 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzés: Ha valaki próbálgatással találja meg a számot, és nem írja le az összes esetet, akkor annak indoklása nélkül, hogy az a legkisebb csak 6 pontot kapjon.

4. A következő kérdések ugyanarra a hatoldalú szabályos sokszögre vonatkoznak.

a) Mekkorák a sokszög belső szögei?

b) Hány átlója van a sokszögnek?

c) Milyen hosszú a leghosszabb átló, ha a szabályos sokszög beírt körének sugara 15 cm?

Megoldás:

a) A sokszög belső szögei: $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ alapján $\frac{4\cdot 180^\circ}{6}=120^\circ$. 2 pont

b) A sokszög átlóinak a száma: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ alapján $\frac{6\cdot 3}{2}=9$. 2 pont

c) A szabályos hatszög leghosszabb átlója a körül írt körének átmérőjével egyenlő hosszú. 1 pont
A szabályos hatszög felbontható 6 darab szabályos háromszögre,
amelyeknek oldala a hatszög oldalával egyezik meg. 1 pont
A szabályos háromszög magassága a hatszögbe írható kör sugarával egyenlő. 1 pont

A szabályos háromszög magassága: $m=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 1 pont

Mivel $m=R$, ezért $\frac{\sqrt{3}}{2}R=15$,

így $R=\frac{30}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$. 1 pont

Tehát a szabályos hatszög leghosszabb átlójának a hossza: $e=2R=20\sqrt{3}=34{,}64$ cm. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Oldd meg az $x^2-y^2+2x-6y-25=0$ egyenletet a pozitív egész számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenlet teljes négyzetté alakítás után: $(x+1)^2-(y+3)^2=17$. 2 pont
Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva: $(x+y+4)(x-y-2)=17$. 2 pont
Mivel $x; y\in Z^+$ és $1\cdot 17=17\cdot 1$, 1 pont
ezért $x+y+4=1$ és $x-y-2=17$ vagy $x+y+4=17$ és $x-y-2=1$. 2 pont
Az első esetben: $x=8$ és $y=-11$, ami nem megoldás. 1 pont
A második esetben: $x=8$ és $y=5$. 1 pont
Ez megoldása is az eredeti egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

* * * * *

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése esetén a versenyző csak a válaszra adható pontot kaphatja. Több megoldásból csak egy (a jobb) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. Az elérhető maximális pontszám 50 pont.

Kecskemét, 2024. december 2.

A Szervezőbizottság