ABACUS

MATEMATIKAI LAPOK 10–14 ÉVESEKNEK

2023. november

ABACUS, matematikai lapok 10–14 éveseknek
a Bolyai János Matematikai Társulat és
a Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány folyóirata
Alapította: Róka Sándor 1994-ben.

30. évfolyam 3. szám 2023. november

Megjelenik szeptembertől áprilisig havonta 44 oldalon.

A lap támogatói:

Fakopáncs bolt

A főszerkesztő postacíme: 1437 Budapest, Pf. 774
A lap internet címe: www.mategye.hu
A lap (főszerkesztő) e-mail címe: abacusujsag@gmail.com

Címlap: Szepessy Béla grafikusművész és Nagy Attila grafikus
Piktogramok: Váradi Kata
Rajzok: Rigóné Tuska Henriett

Kiadja: Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány
Felelős kiadó: Csordás Mihály
Műszaki szerkesztő: Rigóné Tuska Henriett

ISSN 1219–2597

A lap megrendelhető: MATEGYE Alapítvány 6001 Kecskemét, Pf. 585
Tel.: 76/483-047 E-mail: abacus@mategye.t-online.hu
Adószám: 19047441-2-03

A lap előfizetési díja a 2023/2024-es tanévre 10 000 Ft, ami tartalmazza a postaköltséget, és a pontversenyek nevezési díját is.

L U R K Ó - L O G I K A

rovatvezető: Bagota Mónika

„Az egész számok struktúrája annyira harmonikus, titokzatos, hogy ember ilyet képtelen alkotni. Millió tulajdonságának feltárása szinte lehetetlen.” (Szemerédi Endre)

„A matematikus is, a muzsikus is, végső fokon minden igaz művész, a dolgok belső absztrakt szépségét, harmóniáját, összefüggéseit igyekszik kifejezni. Mindegyik a maga nyelvén. A zenét sokan megértik. A matematikát kevesen. Ez nem jelenti azt, hogy ne lennének a matematikusnak ugyanolyan élményei az alkotás közben, ugyanolyan esztétikai élményei, mint amilyenek keletkeznek bennünk, ha valami nagyon szép zeneművet hallgatunk, vagy amit átél a zeneszerző akkor, amikor rájön arra, hogy mi való ide, mi az az igazán szép.” (Alexits György)

Feladatok csak 3. osztályos tanulóknak

A. 1526. Máté véletlenül kiradírozott egy részt az alábbi bontott alakban leírt számból:

4 százas  tízes 43 egyes

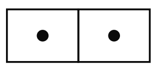
Máté állításai közül melyik igaz biztosan erre a számra?

(1) A szám páratlan szám.
(2) A szám kisebb 500-nál.
(3) A szám nem kisebb 443-nál.
(4) A szám háromjegyű szám.

A. 1527. Manócskának 97 petákja van, ennek egy részét a jobb zsebében, ennél eggyel több petákot pedig a bal zsebében tart. Manócska gondolt egyet és a jobb zsebében levő petákok felét áttette a bal zsebébe, az eddig a bal zsebében levő petákok közül ennél eggyel többet pedig a jobb zsebébe tett át. Hány peták van most Manócska jobb és bal zsebében?

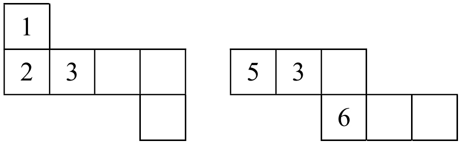
Feladatok 3. és 4. osztályos tanulóknak

A. 1528. Malacka olyan dominókat készít, amelynek mindkét felére egy, kettő, három, négy vagy öt pöttyöt rajzol. (Egy elkészült dominót mutat az alábbi ábra.) Hány dominót készít Malacka, ha az összes lehetséges dominót megrajzolja?



A. 1529. Hanna egy dobozban gyűjti a húszforintosokat. A doboznak a benne levő pénzzel együtt 60 dkg a tömege. Hány forintja van Hannának a dobozban, ha egy húszforintos tömege 10 g, és az üres doboz tömege negyede a dobozban levő pénz tömegének?

A. 1530. Az ábrán két dobókocka hálója látható. A dobókockán a szemközti lapokon levő számok összege 7. Írd be az üres lapokra a hiányzó számokat!



Feladatok csak 4. osztályos tanulóknak

A. 1531. Hány olyan különböző téglalap van, amelynek kerülete 20 cm, és oldalainak hossza centiméterben mérve egész szám? (Két téglalap nem különböző, ha oldalaik hossza megegyezik.)

A. 1532. Réka egy milliméterben megadott távolságot először centiméterre, majd a kapott értéket deciméterre kerekíti. Ugyanezt az értéket kapja-e akkor is, ha a milliméterben megadott távolságot egy lépésben kerekíti deciméterre?

Beküldési határidő:
2023. december 12.

A megoldásokat az alábbi címre küldjétek:
ABACUS Matematika
1437 Budapest, Pf. 774

Az októberben kitűzött feladatok megoldásai

A. 1519. A játékboltban piros és kék dobókockát árulnak. Hány forintba kerül 1 piros és 1 kék dobókocka, ha 4 kék dobókocka ára ugyanannyi, mint 6 piros dobókockáé, és 12 kék dobókocka összesen 540 Ft-ba kerül?

Megoldás: Mivel 12 kék kocka 540 Ft-ba kerül, így egy kék kocka ára 540 Ft : 12 = 45 Ft. Ha a boltban 4 kék dobókocka ára ugyanannyi, mint 6 piros kockáé, akkor 12 kék dobókocka ára ugyanannyi, mint 18 piros kockáé, azaz 540 Ft. Így a piros dobókocka ára 540 Ft : 18 = 30 Ft.

A. 1520. Piripócson egy 400 méter hosszú egyenes út mindkét oldalára egy-egy sorban a lehető legtöbb fát szeretnék ültetni úgy, hogy bármely két szomszédos fának egymástól 8 méterre kell kerülnie. Hány fára lesz ehhez szükség?

Megoldás: Két szomszédos fa távolsága 8 méter, ezért az út mindkét oldalára 400 m : 8 m = 50, azaz 50-szer lehet a 8 m-es távolságot kimérni. Az út egy oldalának beültetéséhez 51 fára van szükség, hiszen minden 8 méteres táv elejére (ez 50 darab) és még az utolsó végére is egy fát kell tenni. Így az út két oldalára összesen $51 \cdot 2 = 102$ fára lesz szükség.

A. 1521. Ede és Béla, a két szórakozott professzor három különböző bejáraton tud bemenni az egyetemre. Hányféleképpen juthatnak be a professzorok az egyetemre, ha két belépést akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább az egyikük nem ugyanazon a bejáraton megy be az épületbe, mint a másik?

Megoldás: A feladatnak kétféle értelmezése van, így két megoldás lehetséges. Első megoldás: Az egyik professzor a három bejárat bármelyikén bemehet, ez 3 eset. Bármelyik bejáraton is ment be ez a professzor, a másik professzor már csak a maradék két bejárat valamelyikén mehet be, így a két professzor $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen mehet be az egyetemre.

Második megoldás: Az egyik professzor a három bejárat bármelyikén bemehet, ez 3 eset. Bármelyik bejáraton is ment be ez a professzor, a másik professzor mindegyik esetben szintén bemehet a három bejárat bármelyikén, így a két professzor $3 \cdot 3 = 9$-féleképpen mehet be az egyetemre.

A. 1522. Van 24 darab azonos méretű fakockánk. Hány különböző tömör téglatestet lehet belőlük építeni, ha mindig mindegyik fakockát beépítjük?

Megoldás: Vizsgáljuk meg az elkészített téglatestek éleit annak alapján, hogy az egy csúcsba futó élekre hány fakockát teszünk. (A fakockák számának sorrendje nyilván nem számít, hiszen azonos hosszúságú éleknél az elkészült téglatestek egyformák.)

A lehetséges esetek:

1	1	24
1	2	12
1	3	8
1	4	6
2	2	6
2	3	4

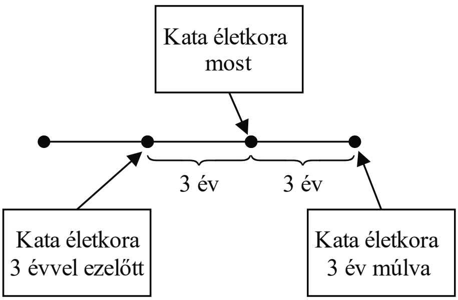
24 azonos méretű fakockából tehát hat különböző tömör téglatestet tudunk építeni.

A. 1523. Egy parkolóban 7 jármű áll, kétkerekű biciklik, négykerekű autók és hatkerekű teherautók, mindegyik fajtából legalább egy darab. A járműveknek összesen 22 kerekük van. Hány bicikli, hány autó és hány teherautó áll a parkolóban?

Megoldás: Tudjuk, hogy a kettő-, négy- és hatkerekű járművek mindegyikéből van legalább egy darab, ez 12 kerék. A maradék 10 kerék még 4 jármű között oszlik el. Hatkerekű jármű már nem lehet közöttük, mert akkor 4 kereket kellene még 3 jármű között szétosztani. A 4 jármű tehát kettő- vagy négykerekű. Ez csak úgy lehetséges, ha közöttük 1 négykerekű és 3 kétkerekű jármű van. A parkolóban tehát 4 kétkerekű bicikli, 2 négykerekű autó és 1 hatkerekű teherautó van.

A. 1524. Hány éves most Kata, ha három év múlva háromszor annyi idős lesz, mint amennyi három évvel ezelőtt volt?

Megoldás: Az ábrából azonnal leolvasható, hogy Kata három év múlva 6 évvel lesz idősebb, mint három évvel ezelőtt volt, és így háromszor annyi idős lesz, mint három évvel ezelőtt.



Kata tehát most 6 éves.

A. 1525. Egy tóban zöld és barna békák úszkálnak. Legkevesebb 5 békának kell kiugrani a partra, hogy biztosan legyen a parton levő békák között zöld béka. Legkevesebb 6 békának kell kiugrani a partra, hogy biztosan legyen a parton levő békák között barna béka. Hány béka úszkál a tóban?

Megoldás: Mivel legkevesebb 5 béka kiugrása esetén biztosan lesz a parton levő békák között zöld, ezért a nem zöld, azaz a barna békák száma 4. Mivel legkevesebb 6 béka kiugrása esetén biztosan lesz a parton levő békák között barna, így a nem barna, azaz zöld békák száma 5. A tóban tehát $4+5=9$ béka úszkál.

A Lurkó-logika feladatsorait és megoldásait Rapcsó Ibolya lektorálta.

M A T E M A T I K A I   P O N T V E R S E N Y

rovatvezetők: Csík Zoltán, Kósa Tamás és Magyar Zsolt

Feladatok csak 5. osztályos tanulóknak

B.1545. Ennek a feladatnak a sorszáma olyan négyjegyű szám, amelynek az első két számjegye által alkotott kétjegyű számot hárommal megszorozva megkapjuk az utolsó két számjegye által alkotott kétjegyű számot. Hány ilyen négyjegyű számot találhatunk?

B.1546. Niki és Miki egy olyan utcában laknak, amelyben csupa családi ház van (mindkét oldalon egyforma telkek találhatóak, minden telken egy ház áll). Ha az utca egyik végétől elindulunk, akkor Nikiék a 13. házban laknak a bal oldalon. Ha az utca másik végétől indulunk el, akkor Nikiék a 24. házban laknak a jobb oldalon. Nikiék és Mikiék háza között 7 másik házat találhatunk. Az utcában a házakat a Nikiékhez közelebbi végétől kezdve folyamatosan számozzák úgy, hogy a páratlan számú házak a bal oldalon, a páros számú házak a jobb oldalon vannak. Hány ház van az utcában összesen? Hányas számú házban lakhatnak Mikiék?

Feladatok 5. és 6. osztályos tanulóknak

B.1547. Sári a nagymama 80. születésnapjára össze szeretné hívni az egész rokonságot. Az étterem, ahol a mulatságot rendezi, úgy van berendezve, hogy minden asztal körül hat szék van. Az asztaloknak és a székeknek is 4-4 lábuk van, összesen 364 láb. A rokonság pont annyi főből áll, hogy ha mindenki eljön, akkor minden széken ülni fog egy ember. Hány főből áll a rokonság összesen?

B.1548. Helyettesítsük be a 0-9-ig terjedő számjegyeket egy kivételével az alábbi betűk helyére úgy, hogy a kialakuló, két háromjegyű szám különbségeként kapott eredmény minél közelebb legyen a 300-hoz! (Különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.)

$$ABC-DEF=GHJ$$

B.1549. A Földre megérkeztek a vénuszlakók. Kinézetre olyanok, mint a földlakók, és alapvetően minden állítás, amit kimondanak, igaz, kivéve azokat, amelyek valamilyen formában a vénuszlakókat említik; ezek hamisak. Ezzel szemben a földlakók minden állítása igaz. Egy egyenes asztalhoz leülnek hatan (mindenki vénuszlakó vagy földlakó), az asztal egyik oldalán egymás mellé. Legyen az ültetésük sorrendje Ami, Bami, Cimi, Demi, Emi és Fami. Az alábbi állításokat mondják:

- Ami: Vénuszlakó mellett ülök.
- Bami: Vénuszlakó mellett ülök.

- Cimi: Ami nem vénuszlakó.
- Demi: Mindkét szomszédom vénuszlakó.
- Emi: Egyik szomszédom sem vénuszlakó.
- Fami: Két vénuszlakó van közöttünk.

Tudjuk, hogy Ami földlakó. Ki földlakó és ki vénuszlakó a többiek közül?

Feladatok csak 6. osztályos tanulóknak

B.1550. Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy konvex hétszög átlóinak?

B.1551. Ennek a feladatnak a sorszáma egy olyan négyjegyű szám, melynek első két számjegye közt 4 az eltérés, és a számjegyeket fordított sorrendben írva ugyanazt a számot kapjuk (palindrom szám). Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám van?

Feladatok csak 7. osztályos tanulóknak

C.1694. Niki és Miki egy olyan utcában laknak, amelyben csupa családi ház van (mindkét oldalon egyforma telkek találhatóak, minden telken egy ház áll). Ha az utca egyik végétől elindulunk, akkor Nikiék a 13. házban laknak a bal oldalon. Ha az utca másik végétől indulunk el, akkor Mikiék a 24. házban laknak a jobb oldalon. Nikiék és Mikiék háza között 7 másik házat találhatunk. Az utcában a házakat a Nikiékhez közelebbi végétől kezdve folyamatosan számozzák úgy, hogy a páratlan számú házak a bal oldalon, a páros számú házak a jobb oldalon vannak. Hány ház van az utcában összesen? Mennyi lehet Mikiék házszáma?

C.1695. Sári a nagymama 80. születésnapjára össze szeretné hívni az egész rokonságot. Az étterem, ahol a mulatságot rendezi, úgy van berendezve, hogy minden asztal körül hat szék van. Az asztaloknak és a székeknek is 4-4 lábuk van. A rokonság pont annyi főből áll, hogy ha mindenki eljön, akkor két szék kivételével minden széken ülni fog egy ember. Hány fős a rokonság, ha összegyűlve a teremben összesen 476 láb van? (A rokonságban mindenkinek két lába van.)

Feladatok 7. és 8. osztályos tanulóknak

C.1696. Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy konvex tízszög átlóinak?

C.1697. A Földre megérkeztek a vénuszlakók. Kinézetre olyanok, mint a földlakók, és alapvetően minden állítás, amit kimondanak, igaz, kivéve azokat, amelyek valamilyen formában a vénuszlakókat említik; ezek hamisak. Ezzel szemben a földlakók minden állítása igaz. Egy kör alakú asztalhoz leülnek hatan (mindenki vénuszlakó vagy földlakó), a kör kerülete mentén egyenletesen elosztva. Legyen az ültetésük sorrendje Ami, Bami, Cimi, Demi, Emi, Fami, majd újra Ami. Az alábbi állításokat mondják:

- Ami: Vénuszlakó mellett ülök.
- Bami: Ami vénuszlakó.
- Cimi: Ami nem vénuszlakó.
- Demi: Velem szemben vénuszlakó ül.
- Emi: Egyik szomszédom sem vénuszlakó.
- Fami: Mindkét szomszédom vénuszlakó.

Ki földlakó és ki vénuszlakó az asztalnál ülők közül?

C.1698. Jancsinak egy dobozban van egy csomó pénzérméje: 5, 10, 20 és 50 forintosok. Az összes érme negyedrésze 5 Ft-os, hatodrésze 50 Ft-os, 1,5-szer annyi 20 forintosa van, mint 50 Ft-osa, a maradék érmék pedig 10 Ft-osok. Tudjuk, hogy összesen 4300 Ft-ot érnek az érmék. Hány darab érméje van Jancsinak az egyes fajtákból?

C.1699. Helyettesítsük be a 0-9-ig terjedő számjegyeket egy kivételével az alábbi betűk helyére úgy, hogy a kialakuló, két háromjegyű szám különbségeként kapott eredmény a lehető legközelebb legyen a 300-hoz! Mutassuk is meg, hogy a kapott eredménynél közelebbi szám nem érhető el! (Különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.)

$$ABC - DEF = GHJ$$

Feladatok csak 8. osztályos tanulóknak

C.1700. Három kereskedő, Ali baba, Szelim és Kháfim boltjában egy hordó olajbogyót ugyanazon az áron lehetett kapni június elején. Ali baba felemelte az árat 10%-kal, majd ismét 10%-kal, majd szeptember elejére 20%-kal csökkentette. Szelim felemelte az árat 20%-kal, majd 10%-kal csökkentette, és szeptember elejére ismét 10%-kal csökkentette. Kháfim felemelte az árat 20%-kal, majd szeptember elejére csökkentette 20%-kal. Tudjuk, hogy Ali Baba szeptember elején 4 dénárral olcsóbban adott egy hordó olajbogyót, mint Szelim. Mennyibe került Kháfim boltjában szeptember elején egy hordó olajbogyó?

C.1701. Jelölje X az első 50 pozitív egész szám négyzetének összegét. Adjuk meg X segítségével az első 50 pozitív páros szám négyzetének összegét!

Beküldési határidő: 2023. december 12.

A megoldásokat az alábbi címre küldjétek:
ABACUS Matematika 1437 Budapest, Pf. 774

Az októberben kitűzött feladatok megoldásai

B. 1538. Két darab 2×2-es táblázat mezőibe beírjuk az 1, 2, 3, 4 számokat úgy, hogy egy táblázaton belül minden szám pontosan egyszer szerepel. Adjuk össze a táblázatok megfelelő mezőiben álló számokat, így kapjuk a harmadik táblázatot. Az alábbiakban látunk egy példát.

1	2
3	4

4	1
3	2

5	3
6	6

A feladat kitölteni az eredeti két táblázatot úgy, hogy az összegtáblázatnak megfeleljen. Keresd meg az összes megoldást!

8	5
4	3

Megoldás: A 8 csak a $4+4$-hez tartozhat, az 5 így csak a $2+3$-hoz (vagy a $3+2$-höz), a 4 ezután csak $1+3$ (vagy $3+1$) lehet, a 3 pedig csakis $1+2$ (vagy $2+1$). Ha az első táblázat jobb felső mezője 3, akkor a kitöltés adódik.

4	3
1	2

4	2
3	1

8	5
4	3

Ha az első táblázat jobb felső mezője 2, akkor a kitöltés adódik.

4	2
3	1

4	3
1	2

8	5
4	3

Két lehetőség van (a táblázatok sorrendjének figyelembe vételével).

B. 1539. Egy kikötőben hatalmas daruk rakják fel a teherautókról a téglatest alakú konténereket a tengerjáró hajóra. A hajón a konténerek úgy vannak elrendezve lényegében hézagmentesen, hogy egyik irányban 21, a másik irányban 23 darabot tudunk megszámolni, és az alsó sorban levő mindegyik konténer tetején van 5 másik konténer. Egy konténer behelyezésével 3 perc 47 másodperc alatt végez egy daru. Mennyi idő (hány nap, hány óra, hány perc és hány másodperc) alatt tudja 6 daru az üres hajót konténerekkel megtölteni?

Megoldás: A hajóra $21 \cdot 23 \cdot 6 = 2898$ konténert tudunk feltenni. Egy konténer berakása összesen 227 másodpercet igényel. Így az összes konténert 657 846 másodperc alatt rakják be. Mivel egyszerre 6 daru végzi a rakodást, ez ténylegesen 109 641 másodperc időtartamot jelent. Átszámítva ez 1827 perc és 21 másodperc, ami 30 óra 27 perc 21 másodperc, ami 1 nap 6 óra 27 perc és 21 másodperc. (A valóságban persze nyilván nem kell ilyen pontossággal számolni).

B. 1540. Induljunk ki egy négyjegyű számból! Egy lépésben az alábbi változtatásokat hajthatjuk végre a számon:

1. Tetszőlegesen felcseréljük a számjegyeit.
2. Az első két számjegy mindegyikét növeljük 1-gyel.

A kezdő számunk legyen a 2024. Érjük el minél kevesebb lépésben, hogy a számunk 4444 legyen!

Megoldás: 2024→3124→4224→2244→3344→4444. Öt lépésben lehetséges. Egy lépésben a számjegyek összege 2-vel nő, vagy nem változik. Kezdetben a számjegyek összege 8, a végén 16, így 4 alkalommal növelni kell az akkori első két számjegy értékét. Mivel a 2-t nem lehet 4-szer növelni, így cserélni is kell legalább egyszer a számjegyeket, így legalább öt lépésre van szükség, ami elegendő is.

B. 1541. ***a)*** Tamás és Gizi testvérek. Tamás most 16 éves. 8 évvel ezelőtt kétszer annyi idős volt, mint Gizi. Hány éves lesz Gizi 10 év múlva?

b) Frici és Mici is testvérek. 10 év múlva Frici kétszer annyi idős lesz, mint Mici. Hány évvel ezelőtt született Frici, ha Mici most szeptemberben kezdi az iskolát, 6 éves korában?

Megoldás: ***a)*** Tamás 8 évvel ezelőtt 8 éves volt, tehát Gizi 4 éves. Most Gizi 12 éves, így 10 év múlva 22 éves lesz.

b) Mici most 6 éves, 10 év múlva 16 éves lesz. Ekkor Frici 32 éves lesz, tehát most 22 éves. Így Frici 22 évvel ezelőtt született.

B. 1542. A bolhapiacon háromféle építőkockát lehet venni (az építőkockák téglatest alakúak): a 2×3×5 cm-es 60 Ft, a 3×6×7 cm-es 80 Ft, a 3×5×12 cm-es 100 Ft. Peti szeretne egy pontosan 100 cm magas tornyot építeni az építőkockákból. Legkevesebb hány forintot kell elköltenie a szükséges építőkockákra?

Megoldás: Peti az egyes építőkockákkal maximálisan 5, 7 illetve 12 cm-t haladhat felfelé a tornyot építve (a továbbiakban a leghosszabb élükkel fogunk hivatkozni az egyes építőkockákra). A 12 cm-es élű építőkocka esetén 1 cm kevesebb, mint 10 Ft-ba kerül, a 7 cm-es esetén 10 és 12 Ft közé esik 1 cm ára, az 5 cm-es esetén 12 Ft 1 cm. Így a legjobban akkor jár, ha igyekszik minél több 12 cm-est felhasználni. Ha 8 db 12 cm-est vesz, akkor kell még 4 cm felfelé, ezt pontosan csak két 60 Ft-os kockából tudja kirakni, így összesen $800+120=$ $=920$ Ft-ot fizet. Ha csak 7 db 12 cm-est vesz, akkor még 16 cm szükséges, ezt legolcsóbban két 60 Ft-osból és egy 80 Ft-osból tudja összerakni ($5+5+6$ cm), ez összesen $700+120+80=900$ Ft-ba kerül. Eddig tehát a legkisebb összeg 900 Ft. Ha 6 db 12 cm-est vesz, akkor még 28 cm kell felfelé, és erre 300 Ft-ja van még a 900-ból, ami nem elég. Ha 5 vagy kevesebb 12 cm-est vesz, akkor pedig cm-enként már legfeljebb 10 forintja lenne a kockákra, azonban ez a másik kétfajta építőkocka esetén nem elegendő. Tehát Peti a legolcsóbban 900 Ft-ból építheti meg a kívánt 100 cm-es kockatornyot.

B. 1543. Két darab 2×2-es táblázat mezőibe beírjuk az 1, 2, 3, 4 számokat úgy, hogy egy táblázaton belül minden szám pontosan egyszer szerepel. Adjuk össze a táblázatok megfelelő mezőiben álló számokat, így kapjuk a harmadik táblázatot. Az alábbiakban látunk egy példát.

1	2		4	1		**5**	**3**
3	4		3	2		**6**	**6**

A feladat kitölteni az eredeti két táblázatot úgy, hogy az összegtáblázatnak megfeleljen. Keresd meg az összes megoldást!

						7	**6**
						4	**3**

Megoldás: A 7 csak a 4+3-hoz tartozhat (vagy 3+4-hez), a 6 így csak a 4+2-höz (vagy a 2+4-hez), a 4 már csak 1+3 (vagy 3+1) lehet, és a 3 pedig csakis 1+2 (vagy 2+1). Ha 7=4+3, akkor a kitöltés adódik.

4	2		3	4		**7**	**6**
3	1		1	2		**4**	**3**

Ha 7=3+4, akkor a kitöltés adódik.

3	4		4	2		**7**	**6**
1	2		3	1		**4**	**3**

Két lehetőség van (a táblázatok sorrendjének figyelembe vételével).

B. 1544. A Földre megérkeztek a marslakók. Kinézetre olyanok, mint a földlakók, de minden állítás, amit kimondanak, hamis, ezzel szemben normál esetben a földlakók minden állítása igaz. Egy kör alakú asztalhoz leülnek hatan (mindenki marslakó vagy földlakó), a kör kerülete mentén egyenletesen elosztva. Legyen az ültetésük sorrendje Andi, Bandi, Cindi, Döndi, Endi, Fándi, majd újra Andi! A marslakóknak olyan kisugárzásuk van, hogy ha egy földlakó mellettük ül az asztalnál, az pont az ellenkezőjét fogja mondani annak, amit mondani akarna magától. Az alábbi állításokat mondják:

- Andi: Marslakó mellett ülök.
- Bandi: Az asztalnál három marslakó ül.
- Cindi: Szeretem a habos kakaót.
- Döndi: Velem szemben marslakó ül.
- Fándi: Mindkét szomszédom marslakó.

Ki marslakó és ki földlakó az asztalnál ülők közül?

Megoldás: Azt, hogy „Marslakó mellett ülök.”, földlakó nem mondhatja. Ugyanis ha tényleg marslakó mellett ülne, akkor hazudnia kéne, de az állítása igaz; ha meg nem ül marslakó mellett, akkor ez hazugság lenne, de földlakóként igazat kéne mondania. Vagyis Andi marslakó, és hazudik. Ebből következik, hogy Bandi és Fándi mindketten földlakók. Döndi igazat mond, hiszen Andi marslakó, tehát Döndi csak földlakó lehet, és nem ülhet marslakó mellett. Mivel Cindi és Endi így földlakó, az asztalnál ülők közül egyedül Andi marslakó. (Bandi és Fándi állításai nem kellettek a megoldáshoz, de ellenőrizhető, hogy marslakó mellett ülő földlakóként tényleg mindketten hazudnak.)

C. 1686. Buda törököktől való visszafoglalására öt sikertelen kísérlet után 1686-ban került sor. A várat a Szent Liga csapatai (kb. 80 000 katona, köztük kb. 25 000 magyar) három hónapon át ostromolták, és végül egy hadicsellel sikerült elfoglalniuk szeptember 2-án. Augusztus elején felmentő török csapatok érkeztek a vár védőinek megsegítésére, de nem tudták áttörni az ostromgyűrűt. Ehhez kapcsolódik a budaörsi Törökugrató legendája: a felmentő sereg egyik részének vezére Szolimán pasa volt, aki a mai Budaörs határában próbált áttörni csapataival, de vereséget szenvedett. A vezér, mivel tudta, hogy Buda merre van, arrafelé próbált meg az üldöző csapatok elől menekülni, de hirtelen egy meredek szakadék szélén találta magát. Mivel az üldözők már a nyomában voltak, csapdába kerülvén a dicső halált választotta: lovának szemét bekötötte, és leugratott a sziklához. A hősies önfeláldozás tiszteletet ébresztett ellenfeleiben, és ettől kezdve nevezik Törökugratónak az addig Hatvantulkos-hegyként ismert hegyet. *(A történelmi hűség kedvéért el kell mondani, hogy valójában biztosan nem Szolimán pasa volt a történet főhőse, mert ő csapataival az ostrom után hazatért Törökországba, ahol több sikertelen csata után 1687-ben kivégezték.)* A történet főszereplője a sziklaoromról sajnos nem láthatta Buda várát, mielőtt leugratott, mert ha egyenesen Buda felé nézett volna, néhány magasabb hegyvonulat eltakarta volna előle azt. A Törökugrató tengerszinttől számított magassága 250 m, Buda váráé 160 m. A két hely egymástól 9 km-re van légvonalban (a térképen), és az őket összekötő egyenes mentén fekszik többek között a Kő-hegy (225 m), a Frank-hegy déli lejtője (270 m) és Farkasrét (270 m). Ezek távolsága a Törökugratótól a mondott sorrendben 2,3 km; 4,1 km; 6 km.
a) Ha csak a Kő-hegy lenne magaslati pontként a Törökugrató és Buda vára között, akkor eltakarná-e a Törökugratóról Buda felé néző lovas elől Buda várát?
b) Milyen magasan lehetne legfeljebb a Frank-hegy adott vonalba eső része, hogy még éppen ne takarja el a rálátást a Törökugrató és Buda vára között?
c) Hány százalékkal kellene alacsonyabban lennie Farkasrétnek, hogy még éppen ne takarja el a rálátást a Törökugrató és Buda vára között?

Megoldás: ***a)*** A Törökugrató tetejét és Buda várát összekötő egyenes mentén láthatjuk a várat a hegyről. Ez az egyenes 9 km hosszan összesen 90 métert ereszkedik, azaz 100 méterenként 1 métert. Ha a Kő-hegyet tekintjük, akkor eddigre a 2300 méteren 23 méter a látóvonal ereszkedése, azaz 2 méterrel a Kő-hegy teteje felett halad. Így a Kő-hegy nem takarja el a kilátást Buda felé.
b) A Frank-hegyig 4100 méteren 41 méter az ereszkedés, tehát a Frank-hegy itt legfeljebb 209 méter magas lehetne.

c) Farkasrétig 6 km-en 60 méter a látóvonal ereszkedése. A hegytető tehát 190 méter magasan lehetne, hogy ne takarja el a rálátást. 80 méterrel kéne tehát alacsonyabban lennie, ami $80:270 \approx 29{,}63\%$-os csökkenést jelent.

C. 1687. Két darab 2×2-es táblázat mezőibe beírjuk az 1, 2, 3, 4 számokat úgy, hogy egy táblázaton belül minden szám pontosan egyszer szerepel. Adjuk össze a táblázatok megfelelő mezőiben álló számokat, így kapjuk a harmadik táblázatot. Az alábbiakban látunk egy példát.

1	2
3	4

4	1
3	2

5	3
6	6

A feladat kitölteni az eredeti két táblázatot úgy, hogy a hiányos összegtáblázatnak megfeleljen. Keresd meg az összes megoldást!

6	6
5	

Megoldás: Az összegtáblázat hiányzó száma a 3, mert $(1+2+3+4)\cdot2-$ $-(6+6+5)=3$. A 6 lehet $4+2$, $2+4$ vagy $3+3$, az 5 lehet $1+4$, $4+1$ $2+3$ vagy $3+2$, a 3 lehet $1+2$ vagy $2+1$. Ha a bal felső mezők 4 és 2, akkor a jobb felső mezők lehetnek 3 és 3, és a további kitöltés adódik.

4	3
1	2

2	3
4	1

6	6
5	3

Ha a bal felső mezők 4 és 2, akkor a jobb felső mezők lehetnek 4 és 2 is, de így az 5 nem jöhet ki a megmaradó 1-esekből és 3-asokból. Ez tehát nem lehetséges.

4	2

2	4

6	6
5	3

Megfelelő mezőcserékkel az alábbi kitöltések vannak még:

2	3
4	1

4	3
1	2

6	6
5	3

3	2
4	1

3	4
1	2

6	6
5	3

3	4
1	2

3	2
4	1

6	6
5	3

Négy lehetőség van (a táblázatok sorrendjének figyelembe vételével).

C. 1688. ***a)*** A bolhapiacon háromféle építőkockát lehet venni (az építőkockák téglatest alakúak): a $2\times3\times5$ cm-es 60 Ft, a $3\times6\times7$ cm-es 80 Ft, a $3\times5\times12$ cm-es 100 Ft. Peti szeretne egy pontosan 100 cm magas tornyot építeni az építőkockákból. Legkevesebb hány forintot kell elköltenie a szükséges építőkockákra?
b) Hétvégére a $3\times5\times12$ cm-es kocka árát felemelik 120 Ft-ra. Katinak 1240 Ft-ja van. Hogyan vásároljon szombaton a kockákból, hogy a megvett darabokból a lehető legmagasabb tornyot tudja felépíteni?

Megoldás: ***a)*** Peti az egyes építőkockákkal maximálisan 5, 7 illetve 12 cm-t haladhat felfelé a tornyot építve (a továbbiakban a leghosszabb élükkel fogunk hivatkozni az egyes építőkockákra). A 12 cm-es élű építőkocka esetén 1 cm kevesebb, mint 10 Ft-ba kerül, a 7 cm-es esetén 10 és 12 Ft közé esik 1 cm ára, az 5 cm-es esetén 12 Ft 1 cm. Így a legjobban akkor jár, ha igyekszik minél több 12 cm-est felhasználni. Ha 8 db 12 cm-est vesz, akkor kell még 4 cm felfelé, ezt pontosan csak két 60 Ft-os kockából tudja kirakni, így összesen $800+{}$ $+120=920$ Ft-ot fizet. Ha csak 7 db 12 cm-est vesz, akkor még 16 cm szükséges, ezt legolcsóbban két 60 Ft-osból és egy 80 Ft-osból tudja összerakni ($5+5+6$ cm), ez összesen $700+120+80=900$ Ft-ba kerül. Eddig tehát a legkisebb összeg 900 Ft. Ha 6 db 12 cm-est vesz, akkor még 28 cm kell felfelé, és erre 300 Ft-ja van még a 900-ból, ami nem elég. Ha 5 vagy kevesebb 12 cm-est vesz, akkor pedig cm-enként már legfeljebb 10 forintja lenne a kockákra, azonban ez a másik kétfajta építőkocka esetén nem elegendő. Tehát Peti a legolcsóbban 900 Ft-ból építheti meg a kívánt 100 cm-es kockatornyot.
b) Ha a 12 cm-es építőkocka ára 120 Ft, akkor még mindig ez a legolcsóbb 1 cm magasságra vetítve, úgyhogy megint érdemes arra törekedni, hogy ebből minél több legyen. Ha Kati vesz 10 db 12 cm-es építőkockát, akkor marad 40 Ft-ja, amiből még egy 5 cm-es építőkocka sem jön ki. Ekkor összesen 120 cm magas tornyot tud építeni. Ha csak 9 db 12 cm-es kockát vesz, akkor marad még 160 Ft-ja, ebből pont két 7 cm-es kockát tud venni, ez összesen $108+14=122$ cm.
Ha csak 8 db 12 cm-es kockát vesz, akkor marad még 280 Ft-ja. Ebből kijön 3 db 7 cm-es vagy 2 db 7 cm-es és 2 db 5 cm-es. Az előbbi esetben összesen $96+21=117$ cm, a második esetben $96+14+10=120$ cm magas tornyot fog kapni. Ez kisebb, mint a 122 cm-es, így nem ez az optimális.
Ha csak 7 db 12 cm-es kockát venne, akkor a 122 cm eléréséhez még 38 cm kellene, de erre már csak 400 Ft-ja van. Ha a 7 cm-es kocka cm árában venné, akkor is $38\cdot80:7\approx434$ Ft-ot kéne kifizetnie, és nincs ennyi pénze. Ha még lejjebb visszük a 12 cm-es kockák számát, akkor már drasztikusan megnőne az 1 cm ára a maradék pénzéhez képest, így 122 cm a legmagasabb torony, amit ennyi pénzből lehet építeni, és ehhez meg kell venni 2 db $3\times6\times7$ cm-es és 9 db $3\times5\times12$ cm-es építőkockát.

C. 1689. A Földre megérkeztek a marslakók. Kinézetre olyanok, mint a földlakók, de minden állítás, amit kimondanak, hamis, ezzel szemben normál esetben a földlakók minden állítása igaz. Egy kör alakú asztalhoz leülnek hatan (mindenki marslakó vagy földlakó), a kör kerülete mentén egyenletesen elosztva. Legyen az ültetésük sorrendje Andi, Bandi, Cindi, Döndi, Endi, Fándi, majd újra Andi. A marslakóknak olyan kisugárzásuk van, hogy aki mellettük ül (akár földlakó, akár marslakó), az pont az ellenkezőjét fogja mondani annak, amit mondani akarna magától. Az alábbi állításokat mondják:

- Andi: Marslakó mellett ülök.
- Bandi: Az asztalnál összesen két marslakó ül.
- Cindi: Szeretem a habos kakaót.
- Döndi: Velem szemben marslakó ül.
- Endi: Cindi nem szereti a habos kakaót!
- Fándi: Mindkét szomszédom marslakó.

Tudjuk, hogy az asztalnál három marslakó ül. Kik azok?

Megoldás: Azt, hogy „Marslakó mellett ülök.”, földlakó nem mondhatja. Ugyanis, ha tényleg marslakó mellett ülne, akkor hazudnia kéne, de az állítása igaz; ha meg nem ül marslakó mellett, akkor ez hazugság lenne, de földlakóként igazat kéne mondania. Vagyis Andi csak marslakó lehet. Ha szomszédai földlakók, akkor hazudik, és ezt helyesen teszi. Ha valamelyik szomszédja marslakó, akkor meggyőződéséhez képest hazudnia kell, tehát igazat kell mondania, és ez esetben azt is teszi. Andi tehát mindenképpen marslakóként is viselkedik. Bandi állítása hamis, ezért Bandi csak földlakó lehet, mivel marslakó mellett ül. Döndi állítása igaz, így ő vagy földlakó és a szomszédai is azok, vagy marslakó és legalább még egy szomszédja marslakó. Ha Döndi földlakó lenne, akkor Endi és Cindi is azok lennének, vagyis Andi mellett csak Fándi lehetne marslakó, de tudjuk, hogy hárman vannak. Tehát Döndi marslakó, és Endi vagy Cindi is az (pontosan az egyikük). Ekkor Fándi már nem lehet marslakó, tehát ő földlakóként hazudik, mert Andi mellett ül, vagyis valójában nem mindkét szomszédja marslakó. Tehát Endi nem marslakó, így Cindi a harmadik marslakó, és szereti a habos kakaót (mert igazat mond, hiszen Döndi mellett ül, aki marslakó). Így Endi állítása is rendben van, hiszen amit mond, az hamis, de van marslakó szomszédja, így tényleg hazudnia kell.

C. 1690. Induljunk ki egy négyjegyű számból! Egy lépésben az alábbi változtatásokat hajthatjuk végre a számon:

1. Tetszőlegesen felcseréljük a számjegyeit.
2. Az első két számjegy mindegyikét növeljük 1-gyel.

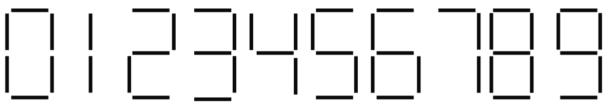
A kezdő számunk legyen a 2024! Mennyi az a legkevesebb lépésszám, amellyel el tudjuk érni, hogy a számunk 7654 legyen?

Megoldás: 2024→3124→4224→5324→3254→4354→5454→6554→7654 Nyolc lépésben lehetséges. Egy lépésben a számjegyek összege 2-vel nő, vagy nem változik. Kezdetben a számjegyek összege 8, a végén 22, így 7 alkalommal növelni kell az akkori első két számjegy értékét. Számjegycserére szükség van, mert az utolsó két számjegy nem maradhat 2 és 4. Így legalább nyolc lépésre van szükség, ami elegendő is.

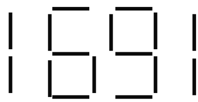
C. 1691. A digitális számjegyeket az alábbi világító pálcika formájú ledekkel ellátott kijelzőn jelenítjük meg (lásd 1. ábra). (Az egyes a két középső függőleges vonalka lesz.)

1. ábra

A számjegyek:



Ha ennek a feladatnak a négyjegyű sorszámát digitális számjegyekkel írjuk, akkor egy középpontosan szimmetrikus ábrát kapunk (lásd 2. ábra). Hány ilyen középpontosan szimmetrikus négyjegyű számot lehet a fenti számjegyek segítségével előállítani?



2. ábra

Megoldás: Ha a szám első két számjegyét megállapítjuk, akkor a tükrözés miatt a másik két számjegy már adódik. Az egymáshoz képest középpontosan szimmetrikus helyzetű számjegypárok: 0-0, 1-1, 2-2, 5-5, 6-9 és 8-8. Tehát az első számjegy hatféle lehet (a négyjegyű szám első számjegye nem lehet 0), a második számjegy pedig hétféle lehet. Ez összesen 42-féle lehetőséget ad, tehát ennyi középpontosan szimmetrikus négyjegyű számot találhatunk.

C. 1692. ***a)*** Két különböző pozitív prímszám szorzatához hozzáadjuk a két prímszámot. Kaphatunk-e így prímszámot? Ha kaphatunk, adjunk rá legalább három példát, ha nem, indokoljuk meg, hogy miért nem.
b) Két különböző pozitív prímszám szorzatához hozzáadjuk a két prímszámot és még 1-et. Kaphatunk-e így prímszámot? Ha kaphatunk, adjunk rá legalább három példát, ha nem, indokoljuk meg, hogy miért nem.

Megoldás: ***a)*** Igen, kaphatunk. Pl: $2\cdot 3+2+3=11$, $3\cdot 5+3+5=23$, $2\cdot 5+2+5=17$.
b) Két páratlan prímszám esetén nem kaphatunk prímet, mert a szorzatuk páratlan, így a négy páratlan szám összege páros lesz, ami nem lehet prím, hiszen 2-nél biztosan nagyobb. Egy páros és egy páratlan prímszám esetén (tehát, ha az egyik prím a 2, a másik pedig p páratlan prím) az összeg $2p+2+p+1=3p+3$, ami 3-mal osztható számot ad, így nem lehet prím, hiszen biztosan nagyobb 3-nál.

C. 1693. Két darab 2×3-as táblázat mezőibe beírjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat úgy, hogy egy táblázaton belül minden szám pontosan egyszer szerepel. Adjuk össze a táblázatok megfelelő mezőiben álló számokat, így kapjuk a harmadik táblázatot. Az alábbiakban látunk egy példát.

1	2	3
4	5	6

3	6	1
5	2	4

4	8	4
9	7	10

A feladat kitölteni az eredeti két táblázatot úgy, hogy a hiányos összegtáblázatnak megfeleljen. Keressük meg az összes megoldást!

11	9	4
9	3	

Megoldás: Az összegtáblázat hiányzó száma a 6, mert $(1+2+3+4+5+6)\cdot 2-$ $-(11+9+4+9+3)=6$.

6	3	

5	6	

11	9	4
9	3	6

A 11 lehet $6+5$ vagy $5+6$, a két 9 pedig ennek megfelelően $3+6$ vagy $6+3$, illetve $5+4$ vagy $4+5$ (Ez négy esetet ad, amit a szürke mezők kitöltése mutat.) A 4 nem lehet $2+2$, mert akkor a 3-at nem tudnánk felírni. Így pedig a további 3-3 mező kitöltése már adódik.

6	5	1
3	2	4

5	4	3
6	1	2

11	9	4
9	3	6

6	3	1
5	2	4

5	6	3
4	1	2

11	9	4
9	3	6

5	4	3
6	1	2

6	5	1
3	2	4

11	9	4
9	3	6

5	6	3
4	1	2

6	3	1
5	2	4

11	9	4
9	3	6

Négy lehetőség van (a táblázatok sorrendjének figyelembevételével).

A Matematikai pontverseny feladatsorait és megoldásait
Szép János lektorálta.

NÉGYOSZTÁLYOS FELVÉTELI

Ecsedi Grácia és Számadó László (Óbudai Árpád Gimnázium, Budapest)

A négyosztályos felvételi minél sikeresebb megoldásához szeretnénk segítséget nyújtani a nyolcadik osztályos tanulóknak azzal, hogy az újságban a központi felvételikhez hasonló gyakorló feladatsorokat jelentetünk meg. A felvételire úgy lehet eredményesen felkészülni, ha ezt a feladatsort a felvételihez hasonló körülmények között, önállóan oldod meg. A javítókulcs az újság következő számában jelenik meg.

* * * * *

Gyakorló feladatsor III.

A megoldásra fordítható idő 45 perc.

A megoldás során számológépet nem lehet használni.

1. Határozd meg az *x*, *y*, *z* és *v* értékét!

a) $x=\frac{8}{5}+0{,}8:2$.

b) $y=$ a 10,5-nél 3-mal nagyobb szám kilenced része.

c) $z=$ a $\frac{3}{4}$-nél 0,11-dal kisebb szám fele.

d) $v=$ a $\frac{4}{7}$, a 0,4 és a $\frac{12}{25}$ közül a legnagyobb.

2. Pótold a hiányzó mérőszámokat, mértékegységeket!

a) 36 m − …… mm = 3500 cm.

b) 4,8 t + 3500 dkg = 4835 …… .

c) 5,8 hl − …… dl = 360 liter.

d) 840 perc + 0,25 nap = …… h.

3. Egy születésnapi tortára 6 különböző színű gyertyát fogunk elhelyezni sorban egymás mellé. Szeretnénk, hogy a zöld két szomszédja a kék és a sárga legyen, a piros és a narancs ne legyen egymás mellett, a lila pedig legyen a sor szélén. Hányféleképpen lehet ilyen feltételekkel sorba rakni a tortán a gyertyákat? Egy sorba rendezést akkor tekintünk újnak, ha legalább egy gyertya, legalább egy szomszédja eltérő színű egy korábbi sorba rendezéshez képest.

Válaszolj a színek kezdőbetűinek beírásával. Egy lehetséges megoldást megadtunk.

L	P	S	Z	K	N												

Lehet, hogy több ábrát adtunk meg, mint amennyi megoldás van. Vigyázz! Ha a megoldások közé hibás elrendezést is beírsz, akkor pontot vonunk le.

4. Válaszolj a következő kérdésekre egy-egy kétjegyű pozitív egész számmal!

a) Mennyi a kitevője annak a hatványnak, amelynek az alapja 2, az értéke 1024?

b) Mennyi a 135 és a 225 legnagyobb közös osztója?

c) Hány négyzetcentiméter a kocka felszíne, ha élei hosszának összege 48 cm?

d) Hány fokos a háromszög legnagyobb belső szöge, ha a szögek aránya 2:3:4?

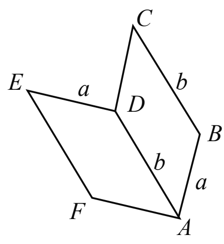
e) Hány átlója van a szabályos hétszögnek?

5. Az osztálykirándulás mindkét napján az ebéd után egy-egy rétest is választhattak a gyerekek: túrósat vagy almásat. A gyerekek közül 19 olyan volt, aki választott túrósat, 17 olyan gyerek volt, aki választott almásat, és 10-en voltak azok, akik túrósat és almásat is ettek. Az osztályban csak egy olyan gyerek volt, aki egyik nap sem kért rétest.

a) Hány gyerek jár ebbe az osztályba?

b) Hány gyerek kért csak túrós rétest?

6. Az ábrán vázolt *ABCDEF* hatszög tengelyesen szimmetrikus. Tudjuk továbbá, hogy $AB=DE=a$, $BC==AD=b$ és $BCD\sphericalangle=45°$. (Az ábra csak tájékoztató jellegű vázlat, nem pontos.)



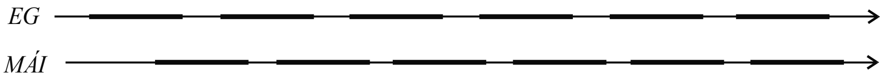
a) Add meg *a* és *b* felhasználásával a hatszög kerületét!

b) Add meg a hiányzó szót: Mivel $BC=AD$ és ez a két szakasz párhuzamos is egymással, ezért az *ABCD* négyszög ……………………… .

c) Hány fokos az $AFE\sphericalangle$?

d) Hány fokos a $BAF\sphericalangle$?

7. Csaba az Egyik Gimnázium (*EG*) tanulója, Niki, a húga a Másik Általános Iskolába (*MÁI*) jár. A gimnáziumban fél 8-kor kezdődnek a 45 perces órák, és 15 perces szünetek vannak. Az általános iskolában 8-kor kezdődik a tanítás 45 perces órákkal és 10 perces szünetekkel. A számegyenesen a vastag vízszintes szakaszok a 45 perces órákat mutatják.



A következő kérdések egy keddi napra vonatkoznak, amikor mindkettőjüknek hat órája van.

a) Kinek fejeződött be korábban a hatodik órája?

b) Amikor Csabának becsöngettek a negyedik órára, akkor mi van Niki órarendjében?

c) Csaba az egyik szünet végén küldött egy sms-t a húgának, akinek pont ekkor kezdődött egy szünet. Mennyi volt ekkor a pontos idő?

d) Maximum hány percet beszélgethettek napközben telefonon úgy, hogy mindkettőjüknek szünet volt?

8. Laura életkora 8 évvel ezelőtt ötödrésze volt édesanyja akkori életkorának. Most Laura harmadannyi idős, mint az édesanyja. Hány éves most Laura édesanyja? Írd le a számolás menetét is!

9. Juli elképzelte a 4×4×4-es Rubik-kockát úgy, hogy csak az élek mentén lévő kiskockákat hagyta meg.

a) Az így kapott test térfogata hány százaléka az eredeti kocka térfogatának?

b) Az így keletkezett test felületén lévő kis négyzetlapoknak hányad részén van a Rubik-kocka felszínén lévő színektől eltérő (szürke) színezés?
Válaszaidat röviden indokold!

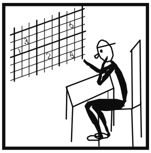
10. Egy természetes szám végéről elhagyva a 4-es számjegyet egy másik számot kapunk. Ennek végéről elhagyva a 2-es számjegyet egy harmadik számot kapunk. A három szám összege 2024.

a) Melyik a második és a harmadik szám? Válaszodat röviden indokold!

b) Tudjuk, hogy $2024 = 11 \cdot 184$. Melyik a legnagyobb prímszám, ami osztója a 2024-nek?

* * * * *

Az Abacus újság októberi számában megjelent Négyosztályos felvételi (Gyakorló feladatsor II.) javítókulcsa a *www.mategye.hu* honlapon olvasható.



S U D O K U

rovatvezetők: Csordásné Pásti Natália és Csordás Péter

A mellékelt ábra tartalmazza az előző havi sudoku helyes megoldását (lásd 1. ábra).

Az új feladvány a 2. ábrán látható. Ezt kell a szabályoknak megfelelően kitölteni és beküldeni.

A feladvány letölthető az internetről is, a *www.mategye.hu* honlapról. A letöltés a nevezéshez használt sorszám és jelszó beírása után lehetséges. Az így letöltött, majd kinyomtatott feladványt kell kitöltés után elküldeni. A megoldást az újságban is elkészítheted, ebben az esetben másold át egy négyzethálós lapra, esetleg fénymásold ki az újságból, és küldd el címünkre! A beküldött megoldáson tüntesd fel a neved, az osztályod és a nevezéskor használt sorszámot! Csak az ezekkel az adatokkal ellátott megfejtések vesznek részt a versenyben. A megoldást ugyanerre a címre küldendő más rovat megoldásával is beküldheted.

4	**3**	8	**9**	6	7	1	**5**	**2**
6	5	7	1	**2**	**4**	**3**	**9**	**8**
2	1	9	8	**5**	3	**6**	7	4
1	9	3	**5**	4	8	7	2	**6**
7	**2**	4	**3**	9	**6**	8	1	5
5	8	**6**	2	7	**1**	**4**	3	**9**
3	4	**5**	7	8	9	**2**	6	1
8	7	**2**	**6**	**1**	**5**	**9**	4	**3**
9	**6**	1	4	**3**	2	**5**	**8**	**7**

1. ábra

3	5			7	8	2	6	
		7						
9								
			7		6		5	
			4	1	2			
2	9		3				7	
		8	1				3	
			6	3	9	8	1	
		9				7		

2. ábra

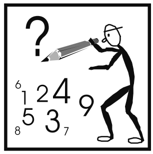
Jó szórakozást a feladványhoz!

A feladvány beküldési címe:
MATEGYE Alapítvány 6001 Kecskemét, Pf. 585

Beküldési határidő: 2023. december 12.

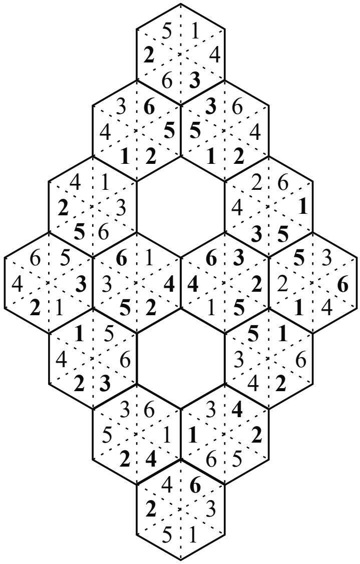
S Z Á M R E J T V É N Y E K

rovatvezető: Csordásné Pásti Natália



Az előző hónapban kitűzött feladat megfejtése az 1. ábrán látható.

A novemberi feladványt a 2. ábrán látjátok. A négyzetrácsot a 0 és 1 számokkal kell kitölteni úgy, hogy kitöltés megfeleljen a szabályoknak. Legfeljebb két 0-s vagy 1-es lehet egymás mellett. Minden sor azonos számú nullást és egyest kell tartalmazzon. Nem lehet sem két egyforma oszlop, sem két egyforma sor.
A feladvány ábrája letölthető az internetről is, a *www.mategye.hu* honlapról. A beküldött megoldáson tüntesd fel a neved, az osztályod és a nevezéskor használt négyjegyű sorszámot! Csak az ezekkel az adatokkal ellátott megfejtések és az interneten a számrejtvénybe benevezett tanulók vesznek részt a versenyben.



1. ábra

1					1		1		
			1		1				1
	0					0			
		1		0				0	
		1		0			0	0	
					1				
		0	0				1		
					1			0	
		1					1		1
	0								

2. ábra

Jó szórakozást a megoldáshoz!

Kérlek Titeket, hogy ne küldjetek válaszborítékot, mert a helyes válaszokat mindig közöljük a következő számban.

A feladvány beküldési címe:

MATEGYE Alapítvány
6001 Kecskemét, Pf. 585

Beküldési határidő:

2023. december 12.

HATOSZTÁLYOS FELVÉTELI

Magyar Zsolt (Budapest)

Gyakorló feladatsor II.

A megoldásra fordítható idő 45 perc.

A megoldás során számológépet nem lehet használni.

A közölt feladatsor elsődleges célja, hogy a felvételiben szereplő feladatokhoz hasonló jellegű feladatokkal gyakorlási lehetőséget biztosítson. Ha valaki nem tudja az összes feladatot megoldani 45 perc alatt, az nem baj, hiszen ebből a szempontból nem tudtuk tesztelni a feladatsor összetételét, inkább a feladatok sokszínűségét és tartalmi gazdagságát tartottuk szem előtt.

1. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $(2024-(-16)-(-4)\cdot(-5)):5=$

b) $24+2\cdot5-21:7=$

c $6\cdot\frac{5}{3}-12=$

d) $(3{,}2+4{,}8+1{,}6):6=$

e) $0{,}7+\frac{2}{5}=$

2. Az alábbi táblázat egy pontozásos verseny bírói pontszámait mutatja. A négy pontszámból a legmagasabb és a legalacsonyabb értéket törlik, és a két megmaradt pontszám összege lesz a versenyző pontszáma. A verseny helyezései az így kapott pontszámok alapján dőlnek el, a magasabb pontszámmal rendelkező versenyző végez előrébb. Holtverseny esetén a versenyzők törölt pontszámait hasonlítják össze, akinél ezek összege nagyobb, az végez előrébb.

Versenyző neve	1. bíró	2. bíró	3. bíró	4. bíró
Kocsis Kázmér	15	21	23	18
Autós Péter	16	24	14	21
Lovas János	13	15	19	20
Kerekes Zoltán	16	18	22	20
Gyalog Béla	18	21	18	19

a) Ki lett az első helyezett?

b) Lett-e olyan holtverseny, amelyet a két törölt pontszámmal kellett eldönteni?

c) Ha igen, eldőlt-e, hogy ki végez előrébb?

d) Hányadik helyezett lett Lovas János?
e) Mennyi lett a 2. helyezett végső pontszáma?
f) Melyik bíró pontszámai közül törölték a legtöbbet?

3. Pótold a hiányzó mérőszámokat!
a) $2\ \text{m} - 6\ \text{dm} =$ .... cm.
b) $5\ \text{liter} +$ .... $\text{dl} = 640\ \text{cl}$.
c) $1{,}3\ \text{óra} + 42\ \text{perc} =$ .... óra.
d) $20\ \text{dm}^2 + 23\ \text{cm}^2 =$ .... mm^2.
e) $0{,}8\ \text{kg} = 130\ \text{dkg} -$ .... g.

4. Pisti kivágott kartonpapírból 3 db 4 cm oldalú négyzetet, majd ezeket odaadta az öccsének, Gabinak. Gabi az első négyzetet két egyforma négyszögre vágta szét, melyeknek volt 2 cm-es oldaluk. A második négyzetet két egyforma háromszögre vágta szét. A harmadik négyzetet két egyforma négyszögre vágta szét, melyeknek volt 1 cm-es oldaluk. Az így kapott 6 kartondarabot betette egy dobozba, majd kivett közülük két darabot. A táblázatban szereplő állítások erre a két darab kartonra vonatkoznak. Döntsük el, hogy melyik esemény biztos, melyik lehetséges, de nem biztos, és melyik lehetetlen.

	Biztos	Lehetséges, de nem biztos	Lehetetlen
A két darab összeilleszthető egy háromszöggé.			
A két darab összeilleszthető egy olyan négyszöggé, amely nem négyzet.			
A két darab összeillesztésével egy 18 cm^2 területű sokszöget kapunk.			
Egyik darabnak sincs derékszöge.			
A két darabot nem tudjuk négyzetté összeilleszteni.			

5. Az úgynevezett angolszász mértékegységek még ma is használatban vannak. A hosszúság mérésére használt három mértékegységről (yard, láb, hüvelyk) az alábbiakat tudjuk:

- 1 yard = 3 láb;
- 1 láb = 12 hüvelyk;
- 1 hüvelyk = 2,54 centiméter (cm).

a) Hány hüvelyk 1 yard?

b) Hány cm egy láb?

c) Hány cm magas egy 6 láb 4 hüvelyk magas férfi?

d) Hány cm-rel kevesebb 1 yard, mint 1 méter?

e) Ha 10 yard szövetből eladnak egy 12 láb 8 hüvelyk hosszúságú darabot, akkor milyen hosszú (hány láb hány hüvelyk hosszúságú) darab marad?

6. Sanyó 8 db fehér színű, 1 cm élhosszúságú kiskockából összeragasztott egy nagyobb kockát. Az így kapott kocka minden kiskockájának minden látható lapjához hozzáragasztott egy-egy piros kiskockát (teljes lapokkal csatlakoztatva ezeket egymáshoz), majd a kapott testet kiegészítette a lehető legkevesebb zöld kocka hozzáragasztásával úgy, hogy egy nagyobb kocka jöjjön létre.

a) Hány piros kockát használt fel?

b) Hány cm lett a legnagyobb kocka éle?

c) Hány cm^2 piros felületet kapott a legnagyobb kockán?

d) Hány zöld kockát használt fel?

7. Anna, Bea és Cili egy találkozót beszéltek meg a Duna-parti sétányon a Margit híd és a Lánchíd közötti 1800 méteres szakaszon, de egyikük sem emlékezett rá, hogy pontosan hova. Ezért kimentek az általuk gondolt hely közelébe, és ott fel-alá sétálgattak, bízva abban, hogy találkoznak a többiekkel. Anna a Margit hídtól 300 m-re kezdte a sétálgatást, és a Lánchíd felé egy 800 méteres szakaszt járt be ide-oda. Bea a Margit hídtól 500 m-re kezdte meg a sétáját, és a Lánchídtól 500 m-re fordult vissza. Cili egy 500 méteres szakaszt járt be, melynek a Lánchídhoz közelebbi vége a hídtól 800 méteres távolságra volt. Mivel a Duna-parti sétányon elég nagy volt a tömeg, ezért csak akkor láthatták meg egymást, ha már nagyon közel kerültek a többiekhez.

a) Ki volt a sétája során legközelebb a Margit hídhoz?

b) Hány méteres szakaszon sétálgatott Bea?

c) Hány méteres volt az az útszakasz, melyen belül mindhárman jártak, azaz ahol találkozhattak?

d) Anna útközben találkozott Dénessel a parton, aki szintén egy adott szakaszon sétált ide-oda, a barátját várva. Anna és Dénes sétájának egy 200 méteres szakasza volt közös. Hány méter lehetett Dénes sétája során a Margit hídtól mért legkisebb távolsága, ha ő egy 600 méteres útvonalon járkált fel- és alá?

8. Két dobozban 10 és 20 forintosok vannak. Mindkét dobozban ugyanolyan összértékű pénz található. Az első dobozban ugyanannyi 10 forintos van, mint 20 forintos, a második dobozban négyszer annyi 10 forintos van, mint 20 forintos. A két dobozban összesen 30 db 10 forintos van.

a) A második dobozban levő pénzérmék hányadrésze 20 forintos?

b) Lehet-e a második dobozban 25 db 10 forintos?

c) Hány 10 forintos van az első dobozban?

d) Hány forint van összesen a két dobozban?

9. A 2024, akárcsak a 2420 olyan négyjegyű szám, amely két egymást követő 4-gyel osztható kétjegyű számra bontható.

a) Melyik a legkisebb ilyen négyjegyű szám?

b) Melyik a legnagyobb ilyen négyjegyű szám?

c) Hány ilyen négyjegyű szám van?

10. Gizi a nagypapa régi zoknijait rakta sorba. Nagyon sok olyat talált, ami egyforma színű volt, és ezek között voltak bizony lyukasak is. A sorbarakott zoknik között minden ötödik lyukas volt, minden harmadik térdzokni, a színek pedig fehér, fekete, kék, szürke sorrendben követték egymást, ismétlődően.

a) Milyen volt a sorban a 13. zokni?

b) Hányadik volt a sorban az első szürke, lyukas térdzokni?

c) Hányadik volt a sorban a második kék térdzokni?

* * * * *

Az Abacus újság októberi számában megjelent Hatosztályos felvételi (Gyakorló feladatsor I.) javítókulcsa a *www.mategye.hu* honlapon olvasható.

* * * * *

„A matematika bizonyos tekintetben mindig is az összekötő kapocs szerepét játszotta a különböző tudományok, valamint a tudomány és a művészet között. Meggyőződésem, hogy e tekintetben a matematikára a jövőben még fokozottabb szerep hárul.”

Rényi Alfréd

L O G I - S A R O K

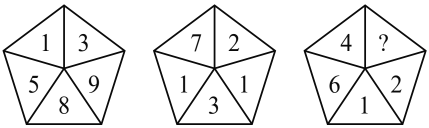
rovatvezető: Tuzson Zoltán

A kitűzött feladványok

L. 622. Mit írjunk a kérdőjel helyére?

H, *N*, *Y*, *F*, *K*, ?

L. 623. Mit írjunk a kérdőjel helyére?



L. 624. Mit írjunk a kérdőjel helyére?

1812	9234
2421	6437
1556	3578
1436	2794
????	2545

Jó szórakozást és hasznos időtöltést kívánunk!

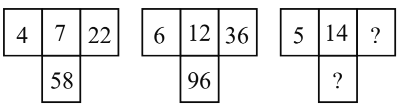
* * * * *

F I G Y E L E M !

A Logi-sarok feladatai nem szerepelnek a pontversenyben, ezért kérjük, hogy ne küldjétek be a feladatok megoldásait! A megoldások nem kerülnek értékelésre.

A korábban kitűzött feladványok megfejtése

L. 619. Mit írjunk a kérdőjel helyére?



Megfejtés: Vegyük észre a következő számösszefüggéseket $(4+7)\cdot 2=22$ és $(7+22)\cdot 2=58$. Hasonlóan $(6+12)\cdot 2=36$ és $(12+36)\cdot 2=96$, ezért a felső kérdőjel helyére $(5+14)\cdot 2=38$, az alsó kérdőjel helyére $(14+38)\cdot 2=104$ talál.

L. 620. Mit írjunk a kérdőjel helyére?

387924, ?, 3724, 423, 32

Megfejtés: Az első szám kivételével mindegyik számot az előzőből kapunk úgy, hogy annak megfordítjuk a számjegyeinek sorrendjét, és töröljük a legnagyobb számjegyet. Ennek alapján a kérdőjel helyére 429783 számból törölve a 9-et, a kérdőjel helyére 42783 kell írni.

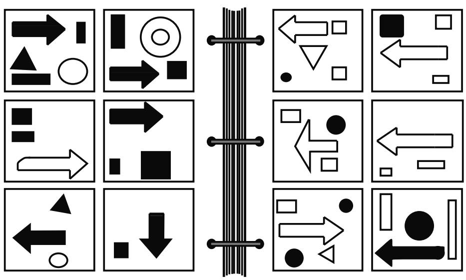
L. 621. Mit írjunk a kérdőjel helyére?

7	2	9	16
13	12	3	?
?	5	14	11
10	15	8	1

Megfejtés: A 4 az első oszlopba, a 6 a negyedik oszlopba talál, ugyanis így egy olyan 4×4-es bűvös négyzetet kapunk, amelyben a bűvös összeg 34 (vagyis sorok, oszlopok és átlók mentén a számok összege 34).

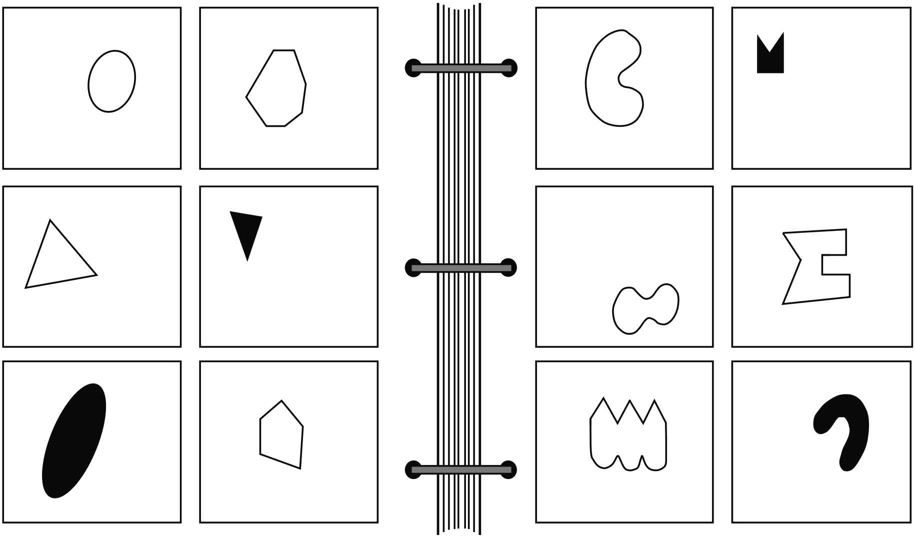
Bongard problémák

BP. 2. Miben különböznek az első csoport ábrái a második csoport ábráitól?



Megfejtés: Figyeljük meg a bal, illetve a jobb oldalon elhelyezkedő alakzatokat. Miután észrevesszük, hogy vannak szögletes alakzatok és vannak görbe vonalú alakzatok, szembetűnő, hogy a bal oldalon a szögletes vonalú alakzatok mind sötétek, a görbe vonalú alakzatok pedig mind fehérek. A jobb oldalon minden éppen fordítva van, a szögletes alakzatok a fehérek, és a görbe vonalú alakzatok a sötétek. (Egy alakzat akkor görbe vonalú, ha tartalmaz görbe vonalat is).

BP. 3. Miben különböznek az első csoport ábrái a második csoport ábráitól?



Kellemes és hasznos időtöltést és jó szórakozást kívánok minden Olvasónak!

* * * * *

Feladatok matematikaszakkörre

1. A törpék az egyik hónap 31 napjára beosztották maguk között, hogy a hét különböző napjain ki fogja kisöprögetni házacskájukat. Hapci hétfőnként, Szundi keddenként, Tudor szerdánként, Vidor csütörtökönként, Morgó péntekenként, Kuka szombatonként és Szende vasárnaponként söprögetett. Hapci és Morgó mesélte, hogy ők pontosan négyszer kerültek sorra. Ki söprögetett a hónap első napján?

2. A hét törpe a bányából hazatérve ajándékot visz Hófehérkének. Mindegyikük egy-egy aranyláncdarabot, ami hét láncszemből áll. A kis Kuka menetközben elveszít egy láncszemet az ajándékból, így ő csak hat szemből álló láncdarabbal lepi meg Hófehérkét. Mennyi az a legkevesebb láncszem, amit Hófehérkének szét kell nyitnia ahhoz, hogy az ajándékból egyetlen zárt körláncot készítsen?

A feladványok megoldásai a 32. oldalon olvashatók.
Róka Sándor – Feladatok matematikaszakkörre

M A T E M A T I K A I   P R O B L É M Á K

rovatvezető: Csete Lajos

A kitűzött problémák

MP. 410. Ancsi és Bogi egyaránt 16 éves, Cili 15 éves, Dóri 14 éves, Encsi pedig 13 éves. A leányok egy csónakkal akarnak átkelni egy folyón. A csónakban legfeljebb 3 leánynak van férőhely. Egyetlenegy leány sem lehet egyedül a csónakban. A leányok különös szabálya szerint két olyan leány nem lehet egyszerre a csónakban, akiknek a kora között több mint 1 év különbség van.
Át tudnak-e kelni a leányok a folyón ilyen szabályokkal?

MP. 411. Egy konvex 2023-szögben az összes átlót behúzták. Egy egyenes úgy metszi a konvex 2023-szöget, hogy nem megy át egyetlenegy csúcsán sem. Ez az egyenes páros vagy páratlan számú átlót metsz?

Jó munkát kívánok!

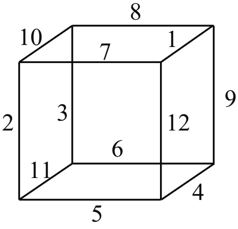
Beküldési határidő: 2023. december 12.

A megoldásokat az alábbi címre várjuk:
Csete Lajos 9023 Győr, Corvin u. 29. III/3.

Korábban kitűzött feladatok megoldásai

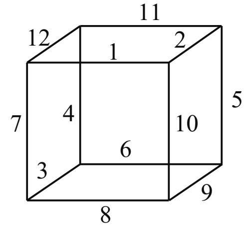
MP. 406. Lehetséges-e a kocka éleit megjelölni az 1; 2; 3; …; 11 és 12 számokkal úgy, hogy a hat oldallap négy-négy oldalélén levő számok összege egyenlő legyen?

1. megoldás: Igen, lehetséges a kocka éleit megjelölni a feladatnak megfelelően. Az alábbi ábra mutat egy megoldást. Itt mind a hat oldallap négy-négy élén levő számok összege 26.



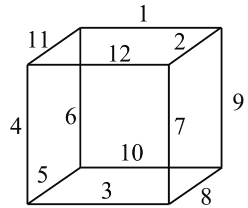
Sőtér Jázmin Sára 7. osztályos tanuló (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium) és Sőtér Hunor Marcell 7. osztályos tanuló (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium) megoldása.

2. megoldás:



Lénárt Kinga 6. osztályos tanuló (Gödöllő, Premontrei Szent Norbert Gimnázium) megoldása.

3. megoldás:



Megoldotta még: Dervalics Anna 8. osztályos tanuló (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium), aki egy táblázattal adta meg az élekre írt számokat.

Megjegyzések:

1. Egy beküldő megtalálta, hogy egy-egy oldallapon a számok összegének 26-nak kell lennie. Utána azt írja, hogy: „Lehetséges az 1–12 számokat ilyen módon felrajzolni." A teljes megoldáshoz hozzátartozik, hogy felrajzoljuk a megfelelő számokat.

2. Három téves megoldás érkezett, amelyekben azt próbálják igazolni, hogy nem létezik a megfelelő megjelölése a kocka éleinek.

3. A problémát a következő helyről vettük: Garaschuk, Kseniya – Andy Liu: *Grade Five Competition from the Leningrad Mathematical Olympiad 1972-1992*, Springer Nature Switzerland, Cham, 2020. A 4. oldalon levő 5. problémát tűztük ki, a 77. oldalon a megoldása, amelyet átalakítva közöltünk a 3. megoldásban.

4. Egy nehezebb rokon problémát a tavalyi tanévben már kitűztünk az *Abacus*ban:

MP. 395. Egy 2×2×2-es kocka felszínét 6×4 darab kis négyzetlap alkotja. Két kis négyzetlapot szomszédosnak nevezünk, ha van közös élük. Lehetséges-e pozitív egész számokat beírni a kis négyzetlapokba úgy, hogy minden négyzetlapba beírt szám és a szomszédaiba beírt számok összege 13 legyen?

Abacus, 2022. október, 32. oldal. A megoldása: *Abacus*, 2022. december, 30. oldal. (Itt igazoltuk, hogy nem létezik megfelelő kitöltés. Nem érkezett be helyes megoldás erre a problémára.)

MP. 407. Létezik-e olyan

a) hétjegyű;

b) nyolcjegyű szám,

amelynek minden számjegye különböző és a szám osztható minden számjegyével?

***a)* 1. megoldás:** A 0 nem lehet a számjegyek között. Az 5-ös kiesik, mert ekkor 5-tel csak az 5-re végződő számok oszthatók. Kiesett a 4-es is, mert ha összeadjuk a számokat, akkor nem lesz osztható az összeg 9-cel vagy 3-mal, így a szám sem. Maradnak az 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 számok. Ezekből egy megfelelő hétjegyű szám az 1 289 736.

Dervalics Anna 8. osztályos tanuló (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium) megoldása.

***a)* 2. megoldás:** Ilyen számban az 5-ös nem szerepelhet, mert páros számnak kell lennie a végződésnek és ha az 5-ös szerepelne, akkor 10-zel is oszthatónak kellene lennie, de ez lehetetlen, mert nem lehet 0 a számjegyek között. Egy megfelelő szám: 7 379 128.

Bozóki Zénó 7. osztályos tanuló (Budapest, XIV. Zuglói Hajós Alfréd Általános Iskola) és Lénárt Kinga 6. osztályos tanuló (Gödöllő, Premontrei Szent Norbert Gimnázium) (aki részletesen leírja, hogy mit vett figyelembe amíg rátalált a megoldásra) megoldása.

***a)* 3. megoldás:** Egy megfelelő szám az 1 369 872.

***b)* Megoldás:** A számjegyek között nem lehet a 0, tehát 0 végű nem lehet. Vagyis 10-zel nem osztható, de 2-vel igen, ezért 5-tel nem osztható. Így a szám a következő nyolc számjegyet tartalmazza: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Ezek összege $1+2+3+4+6+7+8+9=40$. De a 40 nem osztható 9-cel, tehát a szám sem osztható 9-cel (és 3-mal sem). Tehát nem létezik megfelelő nyolcjegyű szám.

Lénárt Kinga 6. osztályos tanuló (Gödöllő, Premontrei Szent Norbert Gimnázium) megoldása.

Megoldotta még a b) feladatot:
Bozóki Zénó 7. osztályos tanuló (Budapest XIV., Zuglói Hajós Alfréd Általános Iskola),
Zawadowski Júlia 7. osztályos tanuló (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimn.)

Megjegyzések:

1. Egyik beküldőnk az ***a)*** feladatra a 6 789 312 számot válaszolta. Ez majdnem jó lett, de mégsem jó, mert 7-tel nem osztható.

2. Egy másik beküldőnk az ***a)*** feladatra az 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 számokból állított össze 9 darab 7-jegyű számot. Ezek közül egyik sem jó, mert e számoknak a végződései az 1, 3, 5 és a 7 számokból állnak a beküldőnknél. Mivel e végződések páratlanok, ezért egyik szám sem osztható 2-vel.

3. Egy harmadik beküldőnk az ***a)*** feladatban azt állítja, hogy létezik megfelelő szám, de nem ad meg ilyen számot és nem is bizonyítja a létezését.

4. Egy negyedik beküldőnk tévesen azt állítja, hogy a ***b)*** feladatban létezik megfelelő nyolcjegyű szám, de nem ad ilyet és a létezését sem bizonyítja.

5. A problémát a következő helyről vettük: Garaschuk, Kseniya – Andy Liu: *Grade Five Competition from the Leningrad Mathematical Olympiad 1972-1992*, Springer Nature Switzerland, Cham, 2020. A 8. oldalon levő 6. problémát tűztük ki és a 87. oldalon a megoldása, amelynek az ***a)*** feladat megoldási részét az ***a)*** 3. megoldásban közöltük.

M A T H E M A T I K

rovatvezető: Nagy Barbara

Magische Quadrate

Ihr kennt schon die magischen Quadrate aus dem letzten Monat. Als Erinnerung: die Summe der Zahlen in einer Spalte, die Summe der Zahlen in einer Zeile und die Summe der Zahlen in den beiden Diagonalen ergibt immer die Zaubersumme. Versucht es jetzt ein 4×4 magisches Quadrat zu lösen! Es ist ein bisschen komplizierter, aber gar nicht so schwer, wie es auf den ersten Blick aussieht. In dieser Aufgabe kommt die Zahl 5 zweimal vor, alle anderen natürlichen Zahlen dürfen nur einmal vorkommen.

Versucht es, alle drei möglichen Lösungen des 4×4 magischen Quadrates zu finden!

Zaubersumme: 50

10	**20**		**5**
		19	
		2	
5	**1**		

Die Lösung des magischen Quadrates findet ihr auf Seite 34.

* * * * *

„Feladatok matematikaszakkörre” megoldások

1. Hapci és Morgó pontosan 4-szer söprögetett, ezért a hónapban pontosan 4 hétfő és 4 péntek van. Mivel $31=7\cdot4+3$, ezért amilyen napokra a hónap első három napja esett, azokon a napokon pontosan ötször sepregettek. Tehát a hónap első három napja közül egyik sem lehet hétfő vagy péntek. A hónap első napja csak kedd lehetett, ekkor Szundi söprögetett.

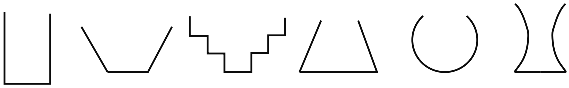
2. Megoldható 7 láncszem kinyitásával, de megoldható 6 láncszem kinyitásával is. A 6 szemből álló láncot láncszemekre szedjük, s ezekkel a megmaradt 6 láncot körlánccá kapcsoljuk.

A feladványok szövegei a 28. oldalon olvashatók.
Róka Sándor – Feladatok matematikaszakkörre

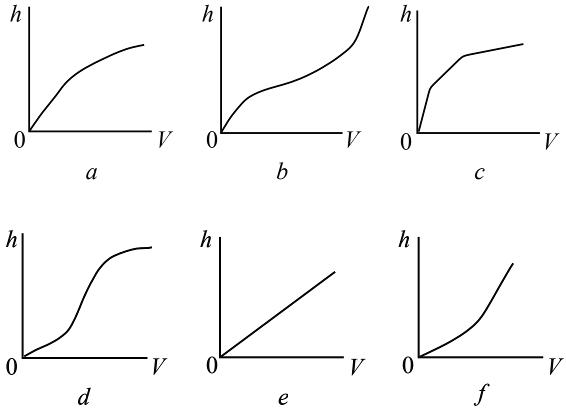
M A T H S

rovatvezető: Pilter Adorján

Last month we filled bottles with water.
I hope you had some experience with these. Now, can you match the bottles below with the corresponding graphs?



1 2 3 4 5 6



There are further questions to consider:
1. Must the height-versus-volume graph be increasing for any bottle? Must it be strictly increasing? Explain.
2. When does the height-versus-volume graph have a “kink” or “corner”? Explain.
(See answers at the end of the column.)

This month we are going in a direction which seems not to be connected to mathematics. We are going to deal with poetry. Of course, you can mention that we can count number of words in a line, or make rhyming patterns, but this time we are going to do none of these. We would like to write a poem in math. The form that we are going to use is that of the limerick. It is written in five lines; the rhyming patter is AABBA. The first, second and fifth lines rhyme, so do the third and fourth. These latter ones are also shorter and have a different rhyme.

Here is a well-known example:

There was a young lady of Niger
Who smiled as she rode on a tiger;
They returned from the ride
With the lady inside,
And the smile on the face of the tiger.
(https://allpoetry.com/Limerick:-There-was-a-Young-Lady-of-Niger)

Now I would like to encourage you to write limericks and send me those. The best ones are going to be published here.

Your poem can be sent to:

abacus@mategye.t-online.hu
Please write "MATHS" into the subject field.

Then next month we will look at a special mathematical limerick and also check if it really is a limerick.

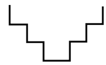
* * * * *

Solution to the bottles: *a*-1, *b*-5, *c*-3, *d*-6, *e*-1, *f*-4

Answer to the questions:

1. The graph does not have to be increasing, but it has to be nondecreasing. There can be constant part if the bottle has a deeper part like this one.

2. The graph has a “kink” or “corner” if the bottle has linear parts added together like this one.



* * * * *

Lösungen des magischen Quadrates:

Zaubersumme: 50

10	**20**	15	**5**
11	8	**19**	12
24	21	**2**	3
5	**1**	14	30

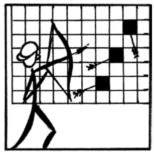
10	**20**	15	**5**
12	8	**19**	11
23	21	**2**	4
5	**1**	14	30

10	**20**	15	**5**
17	8	**19**	6
18	21	**2**	9
5	**1**	14	30

Die ursprüngliche Aufgabe könnt ihr auf Seite 32 lesen.

L O G I G R A F I K A

rovatvezető: Pusztai Ágota



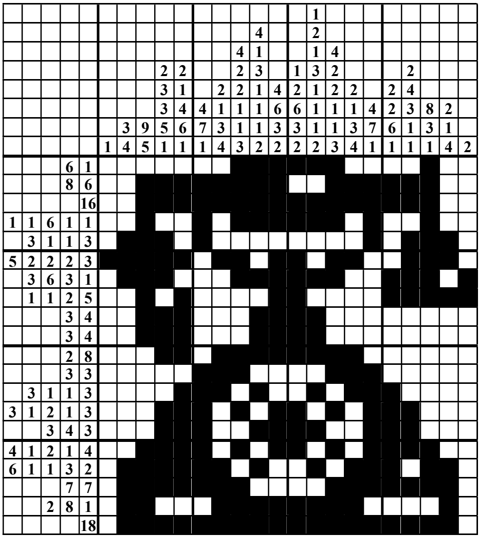
Nézzük meg először az októberi rejtvény megoldását! A jól színezett képen egy régi telefonkészülék látható (1. ábra). Szerintem most már a kezdők is egyre rutinosabban számolgatnak, de a kedvükért még erre a fordulóra is egy könnyebb feladványt választottam (2. ábra). Megoldását a korábbiakban megadott módon várjuk a szerkesztőség címére.

Testvérek vagy azonos iskola tanulói közös borítékban is beküldhetik megfejtéseiket, akár a matematika pontverseny megoldásaival közösen is.

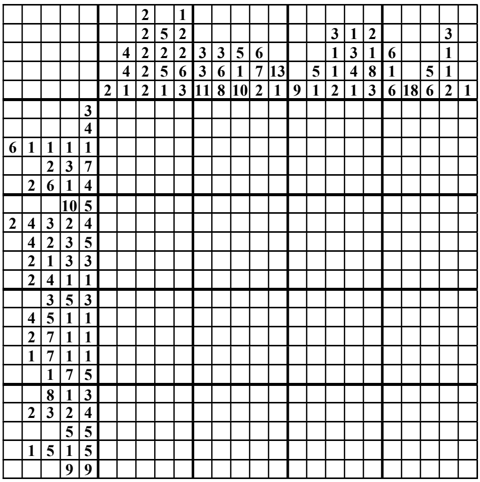
A logigrafika ábrája letölthető a *www.mategye.hu* honlapról. Ez a nevezéshez használt sorszámmal és jelszóval lehetséges. A megoldásra írd rá neved, osztályod és a nevezéskor használt négyjegyű sorszámodat. A tisztázásnál ügyelj a pontos átmásolásra, kár pontokat veszíteni az esetleges figyelmetlenségek miatt! Az elkészített megoldást zárt borítékban küldd el az alábbi címre:

ABACUS Logigrafika
1437 Budapest, Pf. 774

Beküldési határidő:
2023. december 12.

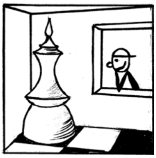


1. ábra



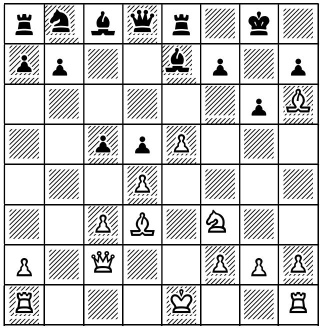
2. ábra

Jó szórakozást a feladványhoz!



S A K K - S A R O K

rovatvezető: Karácsonyi Kata



Kamsky,Gata (2655) - Shirov,Alexei (2655)
Két fiatal nagymester csatájába kapcsolódhatunk be, fehérrel az orosz származású, de az Egyesült Államokban élő Kamsky. Az ellenfél a szintén orosz, de Lettországban nevelkedett, jelenleg Spanyolországban letelepedett Shirov. A partit 1992-ben Dortmundban vívták, ahol is vezércsel alakult ki.
1.d4 d5 2.c4 c6 3.Hf3 Hf6 4.Hc3 e6 5.cxd5 exd5 6.Fg5 Fe7 7.Vc2 g6 8.e4 0–0 9.e5 He4 10.Fh6 Be8 11.Fd3 Hxc3 12.bxc3 c5 (Diagram) Sötét a fejlődés elhanyagolása mellett azt a hibát is elkövette, hogy cserélt a c3 mezőn (világos centrumát erősítve), ahelyett, hogy huszárját d6-f5-g7-tel hátravonta volna védekezni. **13.h4!** Így lehet hasznot húzni a sáncolás elhalasztásából. **cxd4?** [13...Hc6? 14.h5 g5 15.Fxh7+ Kh8 16.Fg6+–]
14.h5! g5 [14...Va5? 15.Hxd4 Hc6 16.Hxc6 bxc6 17.hxg6 hxg6 18.Fxg6 Ff6 19.Fh7+ Kh8 20.f4+–]
15.Fxh7+ Kh8 16.Fg6! Már-már úgy tűnt sötét sikerrel védekezhet, ám világos a vonalnyitást tartja szem előtt.
[16.Hxd4? Hc6 17.Hxc6 bxc6 18.Fd3 c5 Fehér kiengedi a kezéből a kezdeményezést, itt már sötét áll egy kicsivel jobban.]
16...Fe6 [16...fxg6 17.hxg6 Kg8 18.g7+– Fxg5 tervével.]
17.Hxd4 Vc8 18.Vd2! fxg6 19.hxg6 Kg8 20.Bc1! A támadás hevében sem feledkezik el a biztonságról. [20.Fxg5? Fxg5 21.Vxg5 Vxc3+ 22.Ke2 Vc4+ 23.Ke3 Vc3+ 24.Ke2= Gépes változat, ami természetesen egy örökös sakkal zárul.] **20...Hc6 21.Fxg5 Vc7** [21...Hxe5 Jobb lett volna. 22.Fxe7 Bxe7 23.Vh6]
22.Fxe7 Bxe7 23.Kf1! Bae8 24.Be1! Bg7 25.Vh6 Kf8 26.Bh4 Hxd4 27.Vh8+ Bg8 28.Vf6+ Ff7 29.Vxf7+ Vxf7 30.gxf7 Sötét itt feladta, hiszen Kxg7–re Bxd4 és világos simán nyer.
1–0

Az októberi feladványok megfejtései

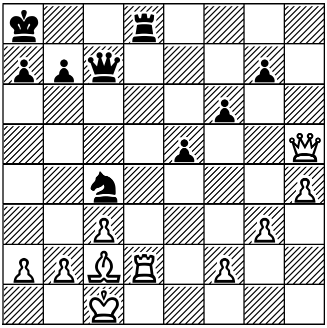
Az első feladvány: 1.Fb7! Bxb7 2.Va6# [1…Fxb7 2.Vb3#]

A második feladvány: 1.f8=F Kd8 2. Bd4#

A harmadik feladvány: 1.Bf2 Vxg6 2.0-0-0#

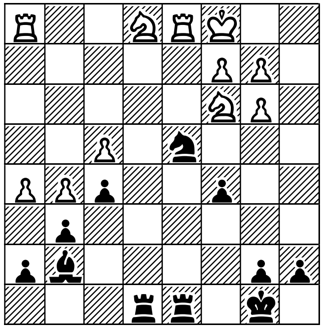
A negyedik feladvány: 1.Ve3 Kb4 2.Vb3# [1…a4 2.Vxc5#] [1…c4 2.Ve8#]

Feladványok



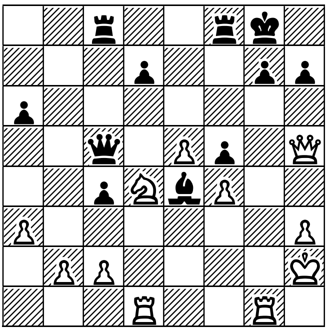
**

1. feladvány: Egy szép példa a figurák túlterheltségére. Világos lép!



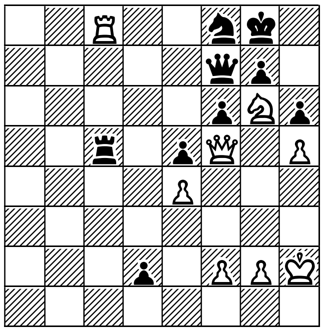
**

2. feladvány: Sötét lép és nyer!



**

3. feladvány: Fehér indul és egy taktikával véget vet a küzdelemnek.



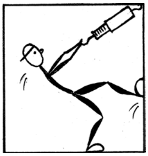
**

4. feladvány: Sürgősen cselekednünk kell, hiszen sötét gyalogja 1 lépésre van az átváltozástól. Világos lép!

A megoldások beküldési határideje: 2023. december 12.

Beküldési cím: ABACUS Sakk 1437 Budapest, Pf. 774

Kérjük, a borítékra írjátok rá „Sakk-sarok“!



F I Z I K A R O V A T

rovatvezető: Szatmáry Zsolt

A kitűzött feladatok

846. *(mérési/kifejtős feladat)* Készíts vízórát (kb. 60 perc méréséhez) két darab 2 literes flakon segítségével! Az egyik flakon alján fúrj megfelelően kis lyukat, a másiknak a felső részén vágd le a tetejét! Helyezd el őket úgy, hogy a felsőből – a lyukon keresztül – kifolyó víz éppen a levágott tetejű alsóba folyjon! A telefonodban található stopper segítségével mérve az időt, filctollal jelöld be a flakonon azonos időközönként a vízszintet! (Én 5 percenként jelöltem.) Készíts egy fényképet az óráról „működés” közben, illetve a flakon oldalán a jelölésekről, és küldd be a képeket is! Mit állapíthatsz meg a vonalak távolságáról? Vajon miért? Végezd el a kísérletet úgy is, hogy a felső flakonra rácsavarod a kupakot! Mit tapasztalsz? Mit gondolsz miért történt?

Szatmáry Zsolt

847. (*7.*) Soma gyakran evez át a közeli folyón. A folyó 180 méter széles, és egy a folyószabályozásra épített sarkantyú lóg bele 30 méter hosszan a partra merőlegesen. Soma a partra merőlegesen evez, a vízhez képest állandó, 1,5 m/s-os sebességgel. A sarkantyú mögött szokott elindulni, ahol végig áll a víz. Majd a sarkantyú végénél hirtelen 1,2 m/s-ra ugrik a folyó sebessége, innen egyenletesen csökken le 0-ra a túlpartig. Mennyivel „lejjebb” szokott a túloldalon partot érni?

Szatmáry Zsolt

848. (*7., 8.*) Egy történet szerint, melyet Vitruvius, római építész írt le, Hierón (i. e. 308 – 215), szürakúzai király számára gyanús volt a korona, amit az aranyművese készített a templom számára. Ezért megbízta Arkhimédészt, hogy valahogyan találja ki, hogy az összes aranyat felhasználta-e az aranyműves, amit a korona készítésére adott. Arkhimédész a kádban ülve jött rá a megoldásra. Ezután állítólag meztelenül szaladva Szürakúza utcáin kiabálta: "heuréka, heuréka!". Vitruvius története szerint Arkhimédész a kitalált módszerrel megállapította az aranyműves csalását, miszerint némi aranyat ezüsttel próbált pótolni a koronában. Arkhimédész a kiszorított víz mérése segítségével oldotta meg a problémát. A következő adatokkal oldjuk meg Arkhimédész feladatát! Színültig töltve egy edényt vízzel, majd belehelyezve egy testet, megmérhető a térfogata a kifolyt víz mennyisége alapján. A korona tömege 800 gramm, vízbe merítve 8,55 cm^3-rel több vizet szorít ki, mint egy 800 grammos színarany test. Milyen arányban (hány %-a) van a koronában az ezüst? (ρ_{arany}=19,3 g/cm^3; $\rho_{ezüst}$=10,49 g/cm^3). Megjegyzés: Más források szerint a felhajtóerő vizsgálatával oldotta meg a problémát.

Szatmáry Zsolt

849. (*8.*) Ernő talál két azonos térfogatú hengert. Az egyikre rá van írva, hogy alumínium, a másikról lekopott a felirat. Ránézésre sárgaréznek tűnik, de meg szeretne győződni róla, hogy lehet-e sárgaréz. Ezért egy kétkarú mérleg két oldalára függeszti a két hengert, majd mindkettőt vízbe meríti, és addig állítgatja őket, míg egyensúlyba nem kerülnek. Ekkor az alumínium felfüggesztése 16 cm-re van a tengelytől, az ismeretlen hengeré pedig 3,6 cm-re. Lehet-e sárgarézből az ismeretlen henger? ($\rho_{alumínium}$=2,7 g/cm^3; $\rho_{víz}$=1 g/cm^3)

Szatmáry Zsolt

850. (*8.*) Ezeket a papírballonokat repülő lámpásnak, azaz Tiang Deng-nek, más néven kívánságlámpásnak is nevezik. Eredete a keleti világban több száz évre nyúlik vissza. A távol kelet egyik legismertebb katonai vezetője, Kong Ming (élt: i.sz. 181-234) katonai információk eljuttatására használta, mely sok-sok kilométer távolságba vitte el a híreket. Később Ázsia egyszerű lakói is felfedezték ezt a lámpást, és mivel nem volt más lehetőség a távoli rokonsággal érintkezni, ezen lámpásokon küldték el személyes üzeneteiket. Idővel rendszeresen eresztettek fel ilyen „hőlégballonokat”, bízva abban, hogy családjukat, szeretteiket így megóvhatják betegségtől, szerencsétlenségtől és bánattól. Innen ered a kívánságlámpás vagy szerencselámpás név. Tominak is megtetszik a dolog, és elhatározza, hogy olajos rizspapírból, hogy jól bírja a meleget, és ne gyulladjon meg, és teamécsesből készít egyet. A lámpa alul lyukas forgáshenger alakú lett: a magassága 40 cm, a sugara 30 cm, és az alsó lapja hiányzik. Az olajos rizspapír tömege 30 g/m^2, a teamécses alumínium tartóban, a rögzítéshez használt fonallal együtt 10 g. A mécses

T **(°C)**	***ρ*****(kg/m³)**
0	1,293
15	1,226
20	1,205
40	1,127
60	1,060
80	1,000
100	0,946
125	0,887
150	0,834
175	0,788
200	0,746

lángja akár 1000°C is lehet, így a levegő könnyen felmelegszik a lámpásban. Hány fokos levegő lehetett a lámpásban, ha éppen elemelkedett Tomi kezéből, és a nyári este 20°C volt? A mellékelt táblázatban a levegő sűrűsége látható különböző hőmérsékleten. (A rizspapír és a teamécses térfogata a ballon térfogatához képest elhanyagolható.)

Szatmáry Zsolt

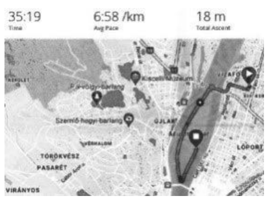
Beküldési határidő: 2023. december 12.

Beküldési cím: ABACUS Fizika 1437 Budapest, Pf. 774

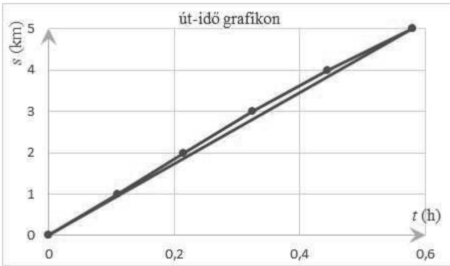
Korábban kitűzött feladatok megoldásai

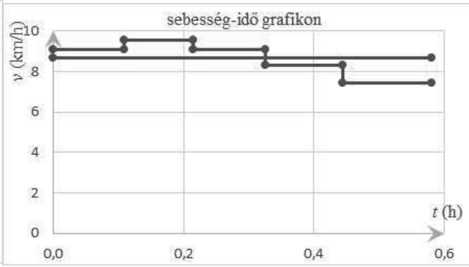
836. *(mérési/kifejtős feladat)* Sportoljunk, mozogjunk a szabadban! Manapság már minden telefonban rendelkezésre áll egy sportmozgást segítő alkalmazás. Az android operációs rendszerrel működő készülékekben pl. a Google Fitnesz könnyen elérhető ingyenesen. Menj el sétálni, vagy kocogni (kicsit több mint) 5 km-t úgy, hogy kapcsold be az alkalmazást. Figyelj arra, hogy minden km-t más, de – a lehetőségekhez képest állandó – sebességgel tegyél meg: legyenek kifejezetten lassabb és gyorsabb kilométerek. A mozgás végén az alkalmazás automatikusan készít egy táblázatot, amelyből kiolvasható a megtett út, az eltelt idő, és az ún. iram (angolul: pace) feltüntetésével. Ezek alapján készítsd el az 5 km-es edzésed út-idő valamint sebesség-idő grafikonját. Számold ki az átlagsebességed, és rajzold be mindkét grafikonra jól láthatóan a megfelelő vonalakat. Mi a kapcsolat a sebesség és az alkalmazás által használt iram között? Mennyi volt az átlagiramod? Számold ki, és hasonlítsd össze az alkalmazás által megadottal. Küldd be a mozgásod (az alkalmazás GPS segítségével elkészített) útvonalának térképét. Képernyőfotó segítségével ezt könnyen kinyerheted a telefonból.

Szatmáry Zsolt



Megoldás: Legnagyobb örömünkre rengeteg szép megoldás érkezett. Ezúttal Makai Lilla 8. osztályos tanuló (Fasori Evangélikus Gimnázium, Budapest) által beküldöttek alapján készült megoldást közlünk. A telefonos alkalmazásból kinyert adatokat átváltottam km-re illetve órára, majd ezek alapján elkészítettem az út-idő illetve a sebesség-idő grafikonokat. (Feltüntettem mindkettőn az átlagsebességet is, azaz azt az értéket, mellyel haladva ugyanakkora idő alatt tettem volna meg az 5 km-t.) Jól látszik, hogy az alkalmazás által feltüntetett Avg Pace (átlag iram vagy tempó) érték éppen a km/perc-ben kiszámolt átlagsebesség reciproka. $v_{\text{átl}} = \dfrac{5\,\text{km}}{34{,}82\,\text{perc}} = 0{,}1436\,\dfrac{\text{km}}{\text{perc}} \Rightarrow \text{iram} = \dfrac{1}{0{,}1436} = 6{,}96\,\dfrac{\text{perc}}{\text{km}} = 6{:}58\,\dfrac{\text{perc}}{\text{km}}$.



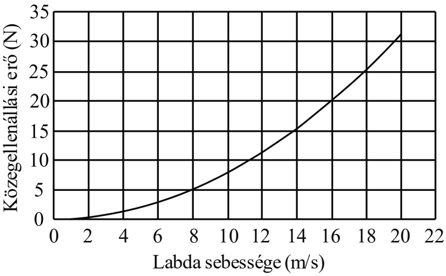


842. (*7.*) Egy Cessna 175-ös kisrepülőgép utazó sebessége (szélcsendben a talajhoz képest) $65\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Egyik repülésekor két repülőtér közötti távot odafelé végig $66\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$-s „hátszélben", visszafelé pedig végig $34\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$-s „ellenszélben" tette meg. Így a menetideje az egyik irányban $\frac{1}{4}$ órával hosszabb volt. Mekkora volt a távolság a két repülőtér között? Mekkora volt a teljes menetidő oda-vissza? Mekkora volt a teljes útra vett átlagsebessége? Mennyivel különbözött volna a menetidő, ha oda-vissza szélcsendben repül? Magyarázd meg a kapott eredményt!

Szatmáry Zsolt

Megoldás: Jelöljük a két repülőtér km-ben mért távolságát s-sel. Érdemes most km-ben, $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$-ban illetve órában számolni, és vegyük figyelembe, hogy $65\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 234\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Felírhatjuk a menetidők különbségére a következőt: $\frac{s}{234-34} - \frac{s}{234+66} = \frac{1}{4}$. Ezt megoldva $s = 150$ km-t kapunk. A teljes menetidő: $\frac{150}{200} + \frac{150}{300} = \frac{5}{4}$, tehát 1 óra 15 perc volt. Így az átlagsebesség a teljes útra: $v_{\text{átl}} = \frac{2\cdot 150}{1{,}25} = 240\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. A menetidő, ha szélcsendben repült volna: $\frac{300}{234} = \frac{50}{39} \approx 1{,}28$ óra, ami kb. 1 óra 17 perc. Tehát a hátszél többet „segített", mint az ellenszél „gátolt", hiszen az átlagsebesség több lett, mint a szélcsendben mért sebesség. Érdemes megfigyelni, hogy sokkal erősebb hátszél kell, hiszen a kisebb sebességgel sokkal hosszabb időt megy, így nagyon „rontja" az átlagsebességet.

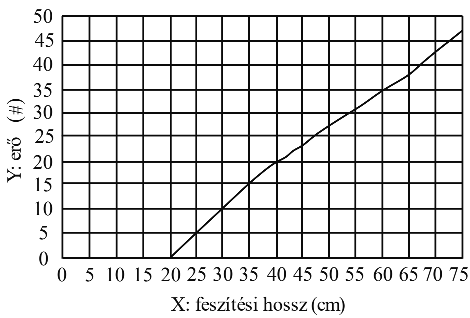
843. (*7., 8.*) Tamás egy 2 kg tömegű kosárlabdát ejt le egy magas gát tetejéről. A grafikonon a labdára ható közegellenállási erőt láthatjuk különböző sebességek esetén. Mekkora erő hat a labdára az elejtés pillanatában? Mekkora gyorsulással indul el a labda? Legfeljebb hány $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességre tud a labda felgyorsulni? Határozd meg a grafikon alapján, hogy $8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességnél mekkora gyorsulással zuhan a labda! (Szél nem fúj, oldalirányú erők nem hatnak a labdára. $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



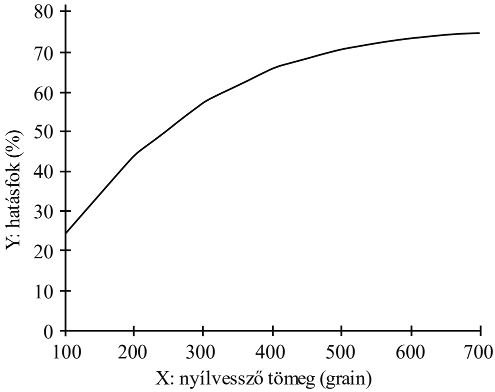
Szatmáry Zsolt

Megoldás: A labdára az elejtés pillanatában, mivel még $0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ a sebessége, $mg = 20$ N erő hat. Ezért a labda $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással indul el. Ez a gyorsulás fog folyamatosan csökkenni, hiszen a labdára ható erő – a grafikonon látható módon – egyre nő, ahogyan a labda sebessége a zuhanás során növekszik. A labda addig gyorsul, amíg a felfelé ható közegellenállási erő egyenlő nem lesz a lefelé ható *mg*-vel. Ez jól látszik a grafikonon, $16\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$-nál következik be. Tehát ez lesz a labda maximális sebessége, innentől állandó sebességgel zuhan. Amikor a sebessége $8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, akkor a lefelé ható 20 N-ból 5 N felfelé ható erőt le kell vonni, így 15 N (eredő) erőt kapunk. Ezt elosztva 2 kg-mal, $7{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ adódik. Képlettel: $a = \frac{mg - F_{\text{kö}}}{m} = \frac{20-5}{2} = 7{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

844. (*8.*) Gábor hagyományőrző íjász. Egyik szakkönyvben a következő két érdekes grafikonra lett figyelmes. Ezen az ún. feszítési grafikonon az látható, hogy egy sportíj esetén adott feszítési hosszhoz, mennyi erő szükséges. A függőleges tengelyen Angliában és az USA-ban használatos mértékegységben, fontban (1 lb. rövid jele: # = 4,56 N) van



az erő megadva. A másik grafikonon az íj energetikai hatásfoka látható: ez az érték azt mutatja, hogy a megfeszítés során végzett munka (az íjban tárolt energia) hány %-át kapjuk vissza a kilőtt nyíl mozgási energiájaként. A vízszintes tengelyen a nyílvessző tömege grainben olvasható le. (Ez elavult tömegmértékegység az angolszász mértékrendszerben. Jelentése szerint gabona(szem), azaz megfelel közelítőleg egy gabonamag tömegének. A volt brit birodalom egyes területein a mai napig találkozhatunk vele. Megfelel 64,79891 milligrammnak. Leggyakrabban a gyógyszerészetben és a lőfegyverek kapcsán találkozhatunk vele.) A két grafikon alapján számoljuk ki, hogy 500 graines nyílvesszőt mekkora sebességgel lehet kilőni ezzel az íjjal! Extra kérdés: mi lehet az oka annak, hogy nagyobb tömegű nyílvesszőre magasabb a hatásfok?



Szatmáry Zsolt

Megoldás: A változó erő munkáját, mint például a nyíl megfeszítéséhez szükséges erő esetében, a grafikon alatti terület kiszámításával határozhatjuk meg. Olvassuk le a 70 cm-hez tartozó erő értéket: 43#≈196 N. 20 cm-ről 70 cm-re kell megnyújtani az íjat, így 50 cm = 0,5 m hosszú úton kell a munkát végezni. A területből (derékszögű háromszögnek tekintve a grafikon alatti területet): $W=\frac{196\cdot 0{,}5}{2}=49$ J adódik. A hatásfok grafikonról leolvasható, hogy 500 grain = = 0,0324 kg-nál 70%-át tudjuk a gyorsításra, a nyílvessző mozgási energiájának növelésére fordítani a megfeszítéskor végzett munkának. Így $0{,}7\cdot 49=34{,}3$ J mozgási energiára tesz szert a kilőtt nyílvessző. Ebből $\frac{1}{2}\cdot 0{,}0324\cdot v^2=34{,}3$ adódik, így a kilövési sebesség $v=46\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-ot kaphatunk.

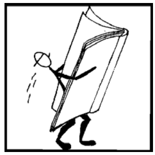
Extra kérdés: A megfeszített íjban tárolt energia egy része az íj karjainak (és az idegnek) a mozgatására használódik el, csak a „maradék” fordítható a nyíl kilövésére. Minél nagyobb a nyílvessző tömege, arányában annál nagyobb rész jut rá.

845. (*8.*) A 2020-as (2021-ben megrendezett) tokiói olimpiai és paralimpiai érmék egy különleges projektből, az ún. „Tokyo 2020 Medal Project”-ből kapták az alapanyagukat: 2017-19 tavasza között, két éven át lakossági gyűjtés zajlott Japánban, melynek során használt elektronikai berendezéseket (mint pl. a mobiltelefonok, tabletek, fényképezőgépek) lehetett a meghatározott gyűjtőhelyeken leadni. Ilyen gyűjtőhelyek voltak a postahivatalok, iskolák, számos kültéri (utcai) gyűjtődoboz, illetve az egyik mobilvállalat üzleteiben is leadhatták a készülékeket, akik szerettek volna adakozni. Közel 80 ezer tonnányi készülék gyűlt össze! Az ezekből kinyert fémek mennyisége (32 kg arany, 3500 kg ezüst, és 2200 kg bronz) elegendő volt az érmekhez – számolt be az Olimpia honlapja. Az elektronikai hulladékból az olimpia szervezőivel szerződött feldolgozó vállalatok nyerték ki az alapanyagokat. Az érmeket tartó szalagok is újrahasznosított poliészter szálakból születtek. Az érmek átmérője 85 mm, vastagsága 7,7-12,1 mm. A 450 g tömegű bronzéremben 95 százalék réz, 5 százalék cink található, az ezüstérem 550 g tömegű tiszta ezüst. Az aranyérem úgy készül, hogy az 550 g tömegű ezüstérem felületére 6 g aranyat hordanak fel. Melyik éremnek mekkora az átlagsűrűsége? Ha mindegyik 85 mm átmérőjű korong lenne, melyiknek mekkora volna a magassága? ($\rho_{\text{arany}}=19{,}3\,\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; $\rho_{\text{ezüst}}=10{,}49\,\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; $\rho_{\text{réz}}=8{,}9\,\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; $\rho_{\text{cink}}=7{,}14\,\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)

Forrás: https://ng.24.hu/kultura/2021/07/24/kulonleges-anyagbol-keszultek-a-tokioi-olimpiai-ermek/

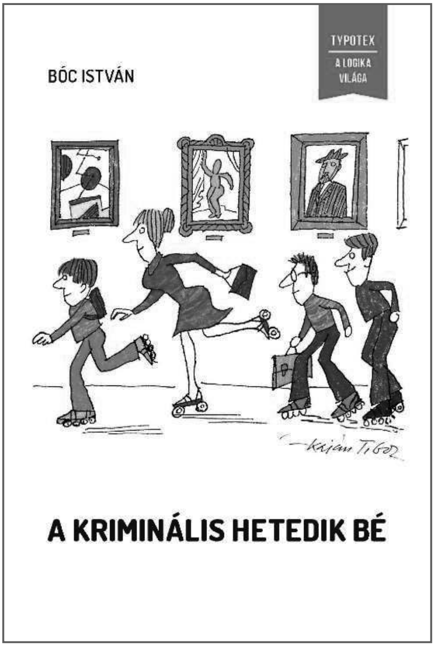
Szatmáry Zsolt

Megoldás: Az átlagsűrűség az ötvözet sűrűsége lesz, melyet úgy tudunk kiszámítani, hogy $\rho_{\text{átl}}=\dfrac{m_{\text{összes}}}{V_{\text{összes}}}$. Kezdjük a bronzéremmel! Számoljuk ki az összetevők tömegét: $m_{\text{réz}}=450\cdot 0{,}95=427{,}5$ g, $m_{\text{cink}}=0{,}05\cdot 450=22{,}5$ g. $V_{\text{réz}}=\dfrac{m_{\text{réz}}}{\rho_{\text{réz}}}=48{,}034\ \text{cm}^3$, $V_{\text{cink}}=\dfrac{m_{\text{cink}}}{\rho_{\text{cink}}}=3{,}151\ \text{cm}^3$. Így a bronzérem átlagsűrűsége: $\dfrac{450}{48{,}034+3{,}151}=8{,}792\,\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Az ezüstérem átlagsűrűsége megegyezik az ezüst sűrűségével, mivel csak egy összetevője van. Az aranyérem esetében egy képlettel felírva a hasonló gondolatmenet alapján, mint a bronzéremnél: $\dfrac{556}{\dfrac{550}{10{,}49}+\dfrac{6}{19{,}3}}=10{,}542\,\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ adódik. Az érmék magasságának kiszámítását kezdjük a korong alapterületének meghatározásával: $r^2\cdot\pi=4{,}25^2\cdot\pi=56{,}75\ \text{cm}^2$. A bronzérem magassága: $\dfrac{48{,}034+3{,}151}{56{,}75}=$ $=0{,}901\ \text{cm}\approx 9\ \text{mm}$. Az ezüstérem magassága: $\dfrac{\dfrac{550}{10{,}49}}{56{,}75}=0{,}924\ \text{cm}=9{,}24\ \text{mm}$. Az aranyéremé pedig: $\dfrac{52{,}73}{56{,}75}=0{,}929\ \text{cm}\approx 9{,}3\text{mm}$. A szövegben szereplő vastagság, a 7,7-12,1 mm egy tartományt jelent, az érem kidolgozásának megfelelően.



K Ö N Y V A J Á N L Ó

Bóc István: A kriminális hetedik bé



Mindenféle gyerek jár a Zebra utcai iskolába. A szülők között van rendőr, bankár, maffiózó, de ide jár az alvilág csavaros eszű ügyvédjének tompa agyú fiacskája is. És persze itt van Juli, akit barátai és ellenségei nem túl találóan csak Szörnyellának neveznek. A gyerekek igazán telibe kapják az életet! Hol mindenféle rablásokba keverednek, hol az iskola körül ólálkodó kábítószerárusok útjait keresztezik. Végül az osztály összetartásának köszönhetően sikerrel veszik fel harcot a bűnözőkkel. A Kaján Tibor által illusztrált huszonhat csattanós történet mindegyikét egy-egy logikai feladat zárja, ami egyedülállóan észpezsdítővé teszi a könyvet.

A könyvesboltokban 3200 Ft-ért kapható, webshopunkban (www.typotex.hu) és az alábbi boltjainkban pedig 25% kedvezménnyel vásárolható meg a többi kiadványunkkal együtt.

Olvasók boltja
1136 Budapest, Pannónia u. 35-37.
www.olvasokboltja.hu

Typotex Kiadó
1024 Bp., Fillér utca 9-11.
www.typotex.hu

ELTE TTK-n lévő pultunk
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/a

TYPOTEX

K Ö N Y V A J Á N L Ó

Kedves Olvasó! A MATEGYE Alapítvány az alábbi kiadványokat szeretné a figyelmébe ajánlani.

Zrínyi 2018	1900 Ft
Zrínyi 2019	1900 Ft
Zrínyi 2020	2500 Ft
Zrínyi 2021	2500 Ft
Zrínyi 2022	3000 Ft
Tanárverseny 2004-2013	1600 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 3. osztály	1700 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 4. osztály	1700 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 5. osztály	1700 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 6. osztály	1700 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 7. osztály	1700 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 8. osztály	1700 Ft
Gordiusz Matematika Tesztverseny feladatai 2007-2008.	1700 Ft
Gordiusz Matematika Tesztverseny feladatai 2009-2010.	1700 Ft
Gordiusz Matematika Tesztverseny feladatai 2011	1700 Ft
Gordiusz Matematika Tesztverseny feladatai 2012	1700 Ft
Zrínyi 2013 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2014 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2016 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2017 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2018 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2019 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2020 (9-12. osztály)	2000 Ft
Zrínyi 2021 (9-12. osztály)	2000 Ft
Zrínyi 2022 (9-12. osztály)	2500 Ft
Fizika az Abacusban	2500 Ft
Bátaszéki Matematikaverseny 2008-2016	2500 Ft
Matematika az Abacusban 2000-2004	2500 Ft
Matematika az Abacusban 2005-2009	2500 Ft
Matematika az Abacusban 2010-2014	2500 Ft
Hibás feladatmegoldások az ált. isk.-ban – Orosz Gyula	1900 Ft
Gordiusz csomag (Gordiusz 2009-2010., 2011., 2012. évi könyvek)	4000 Ft
KMF csomag 2001-2010. évi versenyfeladatok (3., 4., 5., 6., 7., 8. osztály)	7000 Ft

<u>A kiadványok az alábbi elérhetőségeken rendelhetők meg:</u>

Tel.: 76/483-047 E-mail: **mategye@mategye.t-online.hu**