ABACUS

MATEMATIKAI LAPOK 10–14 ÉVESEKNEK

2024. január

ABACUS, matematikai lapok 10–14 éveseknek
a Bolyai János Matematikai Társulat és
a Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány folyóirata
Alapította: Róka Sándor 1994-ben.

30. évfolyam 5. szám — 2024. január

Megjelenik szeptembertől áprilisig havonta 44 oldalon.

A lap támogatói:

Berlitz kids — SHARP — PARK KIADÓ — Fakopáncs bolt — Morgan Stanley

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ — EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA — Nemzeti Tehetség Program

A főszerkesztő postacíme: 1437 Budapest, Pf. 774
A lap internet címe: www.mategye.hu
A lap (főszerkesztő) e-mail címe: abacusujsag@gmail.com

Címlap: Szepessy Béla grafikusművész és Nagy Attila grafikus
Piktogramok: Váradi Kata
Rajzok: Rigóné Tuska Henriett

Kiadja: Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány
Felelős kiadó: Csordás Mihály
Műszaki szerkesztő: Rigóné Tuska Henriett

ISSN 1219–2597

A lap megrendelhető: MATEGYE Alapítvány 6001 Kecskemét, Pf. 585
Tel.: 76/483-047 E-mail: abacus@mategye.t-online.hu
Adószám: 19047441-2-03

A lap előfizetési díja a 2023/2024-es tanévre 10 000 Ft, ami tartalmazza a postaköltséget, és a pontversenyek nevezési díját is.

L U R K Ó - L O G I K A

rovatvezető: Bagota Mónika

„Az életben a szerencse sem véletlenszerűen pártol az emberekhez. A matematikában többnyire azoknak van szerencséjük, akik tehetségükkel, munkájukkal kiérdemlik.” (Staar Gyula)

„A matematika a legbiztosabb módszer a halhatatlanságra. Ha jelentős matematikai felfedezést teszel, még akkor is emlékezni fognak rád, amikor már mindenki mást elfelejtettek.” (Erdős Pál)

Feladatok csak 3. osztályos tanulóknak

A.1540. A pályaudvar egyik oszlopán egymás alatt öt lámpa helyezkedik el. A két felső sárga és piros, a két alsó kék és fehér, a három középső pedig zöld, sárga és kék. Hogyan helyezkednek el az oszlopon a lámpák?

A.1541. Keressük meg az alábbi háromjegyű számokban a letakart számjegyeket úgy, hogy az első négy szám összege egyenlő az ötödik számmal!

2■7, ■46, 53■, 468, 1570

Feladatok 3. és 4. osztályos tanulóknak

A.1542. Katica egy díszdobozt csokoládéval töltött meg, amelynek a tömege így 570 gramm lett. Amikor ugyanezt a dobozt cukorkával töltötte meg, akkor a tömege 410 gramm lett. Hány gramm az üres díszdoboz tömege, ha kétszer akkora tömegű csokoládé fért bele, mint cukorka?

A.1543. Aprajafalva 5 házikóját összesen 7 út köti össze úgy, hogy egy házikóból 4 út, egy másik házikóból 3 út, másik két házikó mindegyikéből pedig 2 út indul. Hány út indul az ötödik házikóból?

A.1544. Jucika a szórakozott titkárnő megírt négy hivatalos levelet és mindegyik levelet beletette egy-egy megcímzett borítékba. Hányféleképpen helyezhette el Jucika a borítékokban a leveleket, ha pontosan két levél került a megfelelő címzetthez?

Feladatok csak 4. osztályos tanulóknak

A.1545. Egy tolltartó egy tollal együtt 730 petákba, a tolltartó egy ceruzával együtt 580 petákba kerül. A toll és a ceruza ára összesen 310 peták. Mennyibe kerül a tolltartó a tollal és a ceruzával együtt?

A. 1546. Nagymama almás pitét sütött egy téglalap alakú tepsiben. A pitét a téglalap oldalaival párhuzamos vágásokkal felszeletelte, így lettek „belső sütemények” (amelyek minden oldala vágott) és „szélső sütemények” (amelyeknek van olyan oldala, amelyik nem vágott). Hány darab „szélső sütemény” lett, ha a „belső sütemények” száma pontosan 4?

Beküldési határidő: 2024. február 13.

A feladatok beküldési címe:
ABACUS Matematika 1437 Budapest Pf. 774

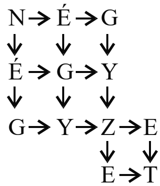
A Lurkó-logika feladatsorait Rapcsó Ibolya lektorálta.

A decemberben kitűzött feladatok megoldásai

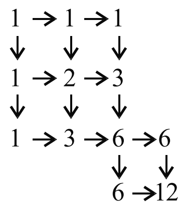
A. 1533. Katica sorban áll a könyvesboltban. A sorban 4-gyel több gyerek áll előtte, mint amennyi mögötte, és a sorban összesen 41-en állnak. Hányan állnak Katica előtt a sorban?

Megoldás: A sorban Katicán kívül még 40 gyerek áll. Ha Katica előtt és mögötte ugyanannyian állnának, akkor 20 gyerek állna előtte és mögötte is. Állítsunk át 2 gyereket Katica mögül Katica elé! Így ekkor Katica előtt 22-en, mögötte pedig 18-an állnak, azaz 4-gyel több gyerek áll előtte, mint utána, tehát 22-en állnak Katica előtt a sorban.

A. 1534. Hány különböző módon olvasható ki a NÉGYZET szó az ábráról, ha az N betűtől elindulva csak a nyilak által meghatározott irányokban haladhatunk az olvasással?



Megoldás: Írjuk az ábrában levő betűk helyére azt a számot, ahányféleképpen a szó addig tartó része kiolvasható az ábrából. Így ha egy betűhöz két irányból is eljuthatunk, akkor oda az előző két szám összege kerül (lásd ábra). A T betű helyén az a szám áll, ahányféleképpen a NÉGYZET szó kiolvasható az ábrából. Tehát a NÉGYZET szó 12 különböző módon olvasható ki az ábrából.

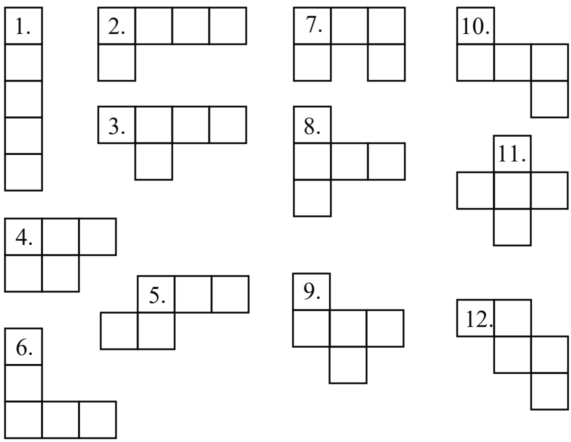


A. 1535. Feri, Gyuri, Jancsi és Kornél ugyanabba az osztályba járnak. Mindegyikük sportoló. Magyar kézilabdázik, Feri úszó, Gyuri tájfutó, Szép pedig lovagol. Egy nap meglátogatják az osztálytársukat. Elsőként Magyar, másodikként Jancsi, harmadikként Kovács, negyedikként pedig Gyuri érkezik meg. A négy fiú közül Szabó a legalacsonyabb. Mi a fiúk teljes neve és ki mit sportol?

Megoldás: A harmadik mondat miatt Gyuri vezetékneve nem lehet sem Magyar, sem Szép, a fiúk érkezési sorrendje miatt pedig Kovács sem. Így Gyuri vezetékneve Szabó és azt is tudjuk, hogy tájfutó. A harmadik mondat miatt Feri vezetékneve sem lehet sem Magyar, sem Szép és az előzőek miatt Szabó sem, így Feri vezetékneve Kovács, és azt is tudjuk, hogy úszó. Tudjuk azt is, hogy Magyar nem lehet sem Feri, sem Gyuri, sem pedig Jancsi keresztnevű. Így Magyar keresztneve csak Kornél lehet, aki kézilabdázik. Ebből pedig már következik, hogy Szép keresztneve Jancsi, aki lovagol.

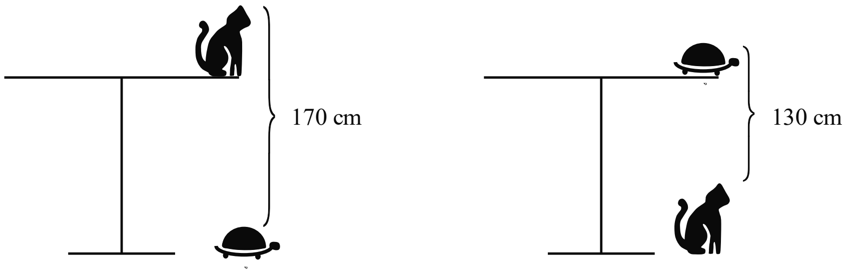
A. 1536. Öt egyforma négyzetből síkidomot készítünk úgy, hogy a négyzetek csak teljes oldallal érintkezhetnek. Hány különböző síkidom készíthető? (Két síkidom nem különböző, ha pontosan egymásra illeszthetők.)

Megoldás: Öt egyforma négyzetből az alábbiak szerint készíthetünk különböző síkidomokat. Először az 5 négyzetlapot tegyük egy sorba: 1. síkidom. Utána pontosan 4 négyzetlapot tegyünk egy sorba, az 5. négyzetlapot pedig helyezzük el az összes lehetséges módon. Így két különböző síkidomot kapunk: 2. és 3. síkidom. Illesszünk most egy sorba 3 négyzetlapot, majd a fennmaradó két négyzetlapot szintén egy sorba illesztve „ragasszuk össze” a két alakzatot a lehetséges módokon. Így kapjuk meg a 4., 5., 6. és 8. síkidomokat. Illesszünk újra egy sorba 3 négyzetlapot, majd a fennmaradó két négyzetlapot mozgassuk külön-külön. A 7. síkidomnál a két négyzetlap ugyanazon az oldalon helyezkedik el, a 9., 10. és 11. síkidomok esetében pedig a két négyzetlap szemközti oldalon helyezkedik el. (A 8. síkidomot tekinthetjük úgy is, hogy ezen a módon áll elő.) Az utolsó síkidomnál csak 2 lap került egy sorba: 12. síkidom.

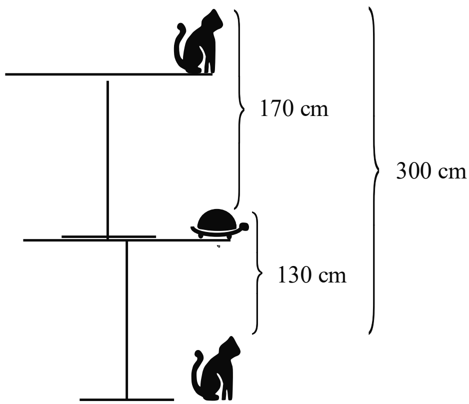


Tehát 12 különböző síkidom készíthető.

A. 1537. Tudjuk, hogy a távolság az asztal tetején ülő macska füleitől a földön lévő teknősbéka páncéljának tetejéig 170 cm, valamint a távolság az asztalon lévő teknősbéka páncéljának tetejétől a földön ülő macska füléig 130 cm (lásd ábra). A két asztal magassága megegyezik. Milyen magasak az asztalok? (forrás: https://filantropikum.com/ez-a-kinai-matematikai-feladvany-bejarta-az-egesz-internetet/)



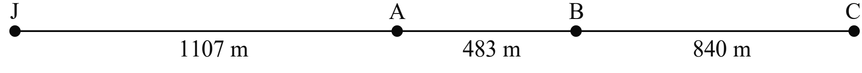
Megoldás: Ha egymásra helyezzük a két asztalt, észrevesszük, hogy a két megadott távolság összege egyenlő az asztal tetején és a földön ülő macska közötti távolsággal: 170 cm+130 cm= =300 cm (lásd ábra). Ha gondolatban az asztalon ülő macskát áthelyezzük a földre, akkor észrevehetjük, hogy az előbb megkapott 300 cm-es összeg éppen a két asztal együttes magassága. Mivel a két asztal magassága összesen 300 cm, így egy asztal magassága 150 cm.



A. 1538. Anna, Bea és Csilla abban az utcában laknak, amelyikben a játszótér található. A lányok házai és a játszótér egyenes utcában, ugyanazon az oldalon helyezkednek el. Anna 1107 méterre lakik a játszótértől, Bea Annától 483 méterre, Csilla pedig Beától 840 méterre lakik. Hány méterre lakhat Csilla a játszótértől?

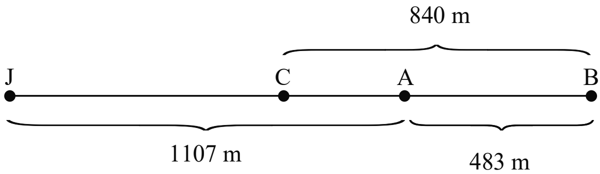
Megoldás: Anna, Bea és Csilla házai és a játszótér négyféleképpen helyezkedhetnek el egy egyenes utcában. Rajzoljuk le az eseteket. A rajzokon a játszótér helyét J betűvel, Anna, Bea és Csilla házának helyét A, B és C betűkkel jelöljük.

1. eset



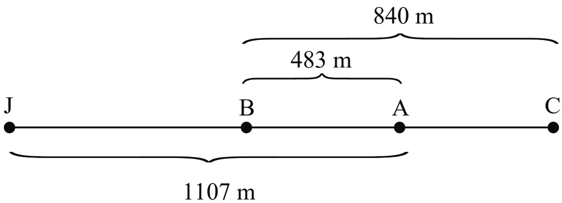
Csilla ebben az esetben 1107 m + 483 m + 840 m = 2430 m-re lakik a játszótér-től.

2. eset



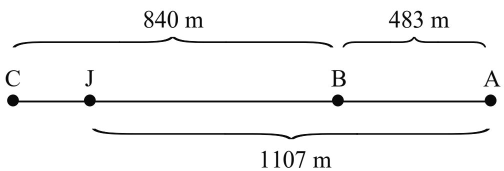
Csilla ebben az esetben 1107 m + 483 m − 840 m = 750 m-re lakik a játszótér-től.

3. eset



Csilla ebben az esetben 1107 m – 483 m + 840 m =1464 m-re lakik a játszótér-től.

4. eset



Csilla ebben az esetben a játszótér másik oldalán lakik, mint Anna és Bea, a játszótértől 840 m + 483 m –1107 m = 216 m-re.

A. 1539. Valamilyen sorrendben egymás mögé írjuk a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat úgy, hogy az első három szám összege egyenlő az utolsó három szám összegével. Melyik szám állhat a középső helyen?

Megoldás: A 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számok összege 35, ebből a középső (a 4. helyen álló) számot elvéve páros számot kell kapnunk, hiszen tudjuk, hogy az első három szám összege egyenlő az utolsó három szám összegével. Így az elvett középső szám csak páratlan lehet. A felsorolt számok közül a 3, 5, 7 páratlan számok, tehát ezek a számok állhatnak a középső helyen. A keresett számsorok fel is írhatók pl. (2, 6, 8, 3, 4, 5, 7), (2, 6, 7, 5, 3, 4, 8), (2, 4, 8, 7, 3, 5, 6).

MATEMATIKAI PONTVERSENY

rovatvezetők: Csík Zoltán, Kósa Tamás és Magyar Zsolt

Feladatok csak 5. osztályos tanulóknak

B.1559. Egy koala naponta 4 órával alszik többet, mint egy gorilla. 3 gorilla és 3 koala napi alvásmennyisége pontosan 4 teljes napot tesz ki. Hány órát alszik egy koala 7 nap alatt?

B.1560. Egy rénszarvas óránként 4800 métert tesz meg, ha lassan halad. Ilyenkor 15 perc alatt 1200-at lép. Ha fut, akkor a lépésének hossza 60 cm-rel nagyobb lesz, és óránként 12 km-t tud megtenni. Mennyivel lép többet percenként futás közben, mint lassan haladva?

Feladatok 5. és 6. osztályos tanulóknak

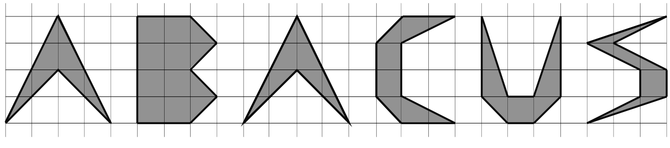
B. 1561. Bori, Sebi és Matyi különböző évesek. A következő állítások közül csak egy igaz:
a) Bori a legöregebb.
b) Sebi nem a legöregebb.
c) Matyi nem a legfiatalabb.
Állítsuk őket életkoruk szerint növekvő sorrendbe!

B.1562. Egy zsákban 10 piros és 12 fehér golyó van. A zsákból egymás után golyókat húzunk. Ha pirosat húzunk, akkor visszatesszük, és még 5 pirosat is beteszünk a zsákba. Ha fehéret húzunk, akkor visszatesszük, és még 3 fehéret is beteszünk a zsákba. Hány húzás után lehet 43 golyó a zsákban?

B.1563. A könyvespolcon a Copperfield Dávid című könyv két kötete úgy helyezkedik el, hogy az első kötettől jobbra kétszer annyi könyv található, mint amennyi balra, a második kötettől pedig balra kétszer annyi könyv található, mint amennyi jobbra. Az első és a második kötet között 4 könyv található. Hány könyv van a könyvespolcon összesen?

Feladatok csak 6. osztályos tanulóknak

B.1564. Hány egységnégyzet az ábrán látható ABACUS felirat területe?



B.1565. Kitti és apukája elmentek egy nemzeti parkba. Ott láttak egy magas fát, aminek nagyon vastag volt a törzse, így elhatározták, hogy megmérik a fa törzsének a kerületét. Kitti is, apukája is a fa törzsét mintegy megölelve mérte körbe a két kezével a fa kerületét (egy ilyen mérés távolságát hívhatjuk „öl”-nek). Kitti pontosan öt ölnyinek mérte a kerületet, az apukája három ölnyinek. Az apuka magasabb Kittinél, ezért ő feljebb mért, ahol a fa kerülete már 60 cm-rel kisebb volt, mint lejjebb, ahol Kitti mért. Kitti három „öle” az apuka két „ölével” egyezik meg. Minden ember öle olyan hosszú, mint amilyen magas. Hány cm Kitti és az apukája magassága között a különbség?

Feladatok csak 7. osztályos tanulóknak

C.1710. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 és 9 számjegyek egyszeri felhasználásával 4 db kétjegyű prímszámot alkottunk. Határozzuk meg ezek összegét!

C.1711. Egy külföldi webshopban bizonyos árucikkek 70, 80, illetve 90%-os árengedménnyel kaphatók. Egyik vásárlásunk során csak ilyen akciós terméket veszünk. A számlán, amelyet kapunk, az akciós termékeket teljes árukkal tüntetik fel, a kedvezményeket viszont a százalékos mértékük szerint összesítve. Így a számlán az alábbiakat látjuk:

Vásárolt termékek	Összesített kedvezmények
A termék összesen 40,84 EUR B termék összesen 52,70 EUR C termék összesen 380,07 EUR D termék összesen 11,54 EUR	70%-os kedvezmény – 36,89 EUR 80%-os kedvezmény – 336,73 EUR 90%-os kedvezmény – 10,39 EUR

Melyik típusú termékre hány % volt a kedvezmény mértéke?

Feladatok 7. és 8. osztályos tanulóknak

C.1712. Melyik az a legkisebb 1000-nél nagyobb szám, ami a 2; 3; 4; 5; 6 számok bármelyikével osztva 1 maradékot ad, és osztható 7-tel?

C.1713. Sanyi egy feladat megoldásaként rossz eredményt kapott. Józsi megnézte az eredményt, és azt mondta, hogy pont 100-zal több, mint a helyes eredmény. Zebulon is megnézte, ő pedig azt állapította meg, hogy Sanyi pontosan hatszor akkora számot kapott eredményül, mint amennyi a helyes lenne. Mennyi a feladat helyes eredménye?

C.1714. Keressük meg az összes olyan $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, melyre $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ négyzetszámok, de $\overline{abcd}$ nem négyzetszám!

C.1715. 10 000 €-t befektettünk egy évre, ebből 4000 €-t évi 5%-os, 3500 €-t évi 4%-os kamatra. Hány százalékos kamatot kapunk a maradék összegre, ha a befektetésünk összesen 500 € hasznot hoz?

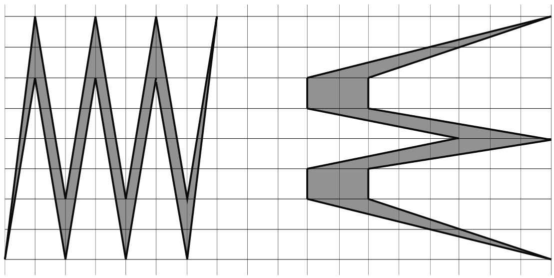
Feladatok csak 8. osztályos tanulóknak

C.1716. Egy külföldi webshopban bizonyos árucikkek 50, 60, 70, illetve 80%-os árengedménnyel kaphatók. Egyik vásárlásunk során csak ilyen akciós termékeket veszünk. A számlán, amelyet kapunk, az akciós termékeket teljes árukkal tüntetik fel, a kedvezményeket viszont a százalékos mértékük szerint összesítve. Így a számlán az alábbiakat látjuk:

Vásárolt termékek	Összesített kedvezmények
A termék összesen 82,49 EUR B termék összesen 52,81 EUR C termék összesen 518,60 EUR D termék összesen 11,80 EUR E termék összesen 183,99 EUR F termék összesen 10,20 EUR G termék összesen 238,55 EUR H termék összesen 147,42 EUR J termék összesen 12,02 EUR K termék összesen 56,83 EUR	50%-os kedvezmény: – 85,62 EUR 60%-os kedvezmény: – 34,10 EUR 70%-os kedvezmény: – 165,76 EUR 80%-os kedvezmény: – 679,87 EUR

Melyik típusú termékre hány % volt a kedvezmény mértéke?

C.1717. Az ábrán látható két síkidom közül melyiknek nagyobb a területe?



A Matematikai pontverseny feladatsorait Szép János lektorálta.

Beküldési határidő: 2024. február 13.

A megoldásokat az alábbi címre küldjétek:
ABACUS Matematika
1437 Budapest, Pf. 774

A decemberben kitűzött feladatok megoldásai

B. 1552. Eger várának ostroma 1552. szeptember 9-én kezdődött, és 40 napig tartott. A vár helyőrsége békeidőben 200 lovas és 200 gyalogos katona volt. A török csapatok támadására készülve a várvédők létszámát négy és félszeresére növelték, de a lovas katonák száma így is csak a védők hatodrészét tette ki. A török hadsereg létszáma 22-szeres túlerőt jelentett a védőkhöz képest. A várban az ostrom alatt 75 védőre jutott egy ágyú, a török csapatoknak pedig éppen hatszor annyi ágyú állt a rendelkezésére, mint a várvédőknek.
a) Hány lovas katona érkezett a várba a törökök támadására való felkészülés során?
b) Hány török katonára jutott egy ágyú az ostromló seregben?
c) Mikor vonultak el a török csapatok a vár ostromát befejezve?

Megoldás: ***a)*** A helyőrség létszámát 1800-ra emelték, ebből 300 volt a lovas katona. Tehát a 200 lovas mellé további 100 érkezett.
b) A török sereg létszáma $22\cdot1800=39\,600$ volt. A várban $1800:75=24$ ágyú volt, a törököknek tehát 144 ágyú állt a rendelkezésére. A török csapatoknál tehát $39\,600:144=275$ katonára jutott egy ágyú.
c) Az ostrom 40 napig tartott, szeptemberben 22 napig, majd októberben további 18 napig. A 40. napon vonultak el a törökök, vagyis október 18-án.

B. 1553. A táblázat üres négyzeteibe írhatunk egy-egy X-et. A négyzetekben levő számok azt mutatják, hogy az adott négyzettel csúcsban vagy élben érintkező négyzetekben összesen maximum hány db X lehet. Keressünk minél több olyan elrendezést, melyben pontosan 5 négyzetben van X!

2		1
	3	
1		2

Megoldás: Összesen 4 lehetséges elrendezés van, amelyek az alábbi táblázatokban láthatók.

2	X	1
X		
X	3	X
1	X	2

2	X	1
X		
X	3	
		X
1	X	2

2	X	1
X		
	3	X
		X
1	X	2

2	X	1
X	3	X
		X
1	X	2

B. 1554. Egy számegyenesen az egész számok helyét kiszínezzük egy-egy piros vagy kék ponttal.
a) Lehet-e úgy választani a színezést, hogy két azonos színű pont távolsága ne legyen 5 egység?
b) Lehet-e úgy választani a színezést, hogy két azonos színű pont távolsága ne legyen sem 5, sem 4 egység?

Megoldás: *a)* Igen, lehet. A páros számok helye legyen például piros, a páratlanoké pedig kék színű.
b) Nem lehet. Legyen az 1 például piros színű, és próbáljunk megfelelően színezni. Ekkor az 5 és a 6 kék, így a 2 piros. Emiatt a 7 kék, így a 3 is piros, ezért a 8 kék és a 4 piros. A 9-et tehát már nem lehet eltérően színezni a 4-től és az 5-től, mert azok különböző színűek.

Másképpen: Minden szám nyilván nem lehet egyforma színű, így kell lenni két egymást követő különböző színűnek. A kisebbiknél öttel nagyobb szám színe ezek közül valamelyikkel meg fog egyezni, így semmilyen színezés nem lehet megfelelő.

B. 1555. Töltsük ki az ábrán látható négyzeteket a 0-9 számjegyek egyszeri felhasználásával úgy, hogy mindhárom műveletsornak ugyanannyi legyen az eredménye!

$$\square : \square \cdot \square$$
$$\square + \square \cdot (\square - \square)$$
$$\square - \square \cdot \square$$

Megoldás: Például, ha 4 az eredmény: $6:3\cdot 2$; $4+0\cdot(8-7)$; $9-1\cdot 5$.

B. 1556. Gabiék minden télen a cinkéknek úgynevezett madárgolyót helyeznek ki a teraszra. Ezt csipegetve a madarak könnyebben átvészelik a telet. A golyó fel van lógatva egy faágra, így amikor a cinkék rászállnak, mindig egy része lepotyog a földre, ahonnan már csak a verebek szedik össze. Egy ilyen golyóban egy cinkének öt hétre elegendő csipegetnivaló lenne, ha nem szóródna le a földre egy része, feltéve, hogy a cinke egész nap rájárna. Gabi megfigyelte, hogy a napok első felében mindig 3 cinke, a második felében pedig mindig 5 cinke csipegeti a madárgolyót. Ha a golyóban levő táplálék ötödrésze hullik le a földre, akkor hány nap alatt fogy el a golyó?

Megoldás: Legyen az egy cinke által fél nap alatt elfogyasztott eledel mennyisége egységnyi. Ekkor naponta 8 egységnyi fogyás látható a madárgolyón. Mivel egy cinkének 5 hétre lenne elegendő, ezért a golyóban levő anyag 70 egységnyi. Ennek az ötöde lehullik a földre, így a ténylegesen elfogyasztható mennyiség 56 egységnyi. Ez napi 8 egységnyi fogyással számolva pontosan 7 napig tart ki.

B. 1557. Keressük meg az összes olyan kétjegyű számot, amely egyenlő számjegyei szorzatának kétszeresével!

Megoldás: A keresett szám mindenképpen páros, hiszen a számjegyek szorzatának kétszeresével egyenlő. Így az utolsó számjegye páros, de emiatt a számjegyek szorzatának kétszerese (azaz a szám) nemcsak 2-nek, hanem 4-nek is többszöröse lesz.

Mivel egy kétjegyű szám legalább akkora, mint az első számjegyének 10-szerese, ezért a második számjegy nem lehet 0; 2 vagy 4, mert akkor a számjegyek szorzatának kétszerese legfeljebb az első számjegy 8-szorosa lenne, ami nem elég.
Ha a második számjegy 6, akkor a szóba jöhető kétjegyű számok a 16; 36; 56; 76; 96, ezek közül a 36 megfelelő.
Ha a második számjegy 8, akkor a szóba jöhető kétjegyű számok 28; 48; 68; 88, ezek közül egyik sem felel meg a feltételnek.
Tehát egyetlen ilyen szám van: a 36.

B. 1558. Katinak van egy fényképe, amelynek az eredeti mérete 4×6 cm, és van egy 18×24 cm-es képkerete. Kati a képet úgy akarja elhelyezni a keretben, hogy a kép rövidebbik oldala a keret rövidebbik oldalával párhuzamos legyen (a kép úgynevezett álló formátumú, és a keretet is álló helyzetében szeretné használni). Mivel a kép elég kicsi a kerethez képest, kétféle nagyítást készíttet a fényképről, a méretarányok megváltoztatása nélkül: egy olyat, ami még éppen belefér a keretbe, és egy olyat, ami teljesen kitölti a keretet (ez esetben a kilógó részt le kell vágni). Hányadrésze lesz a képkeretnek üres, illetve hányadrészét kell a nagyított fotónak levágni az egyes esetekben?

Megoldás: A fényképet kétféleképpen nagyítják: úgy, hogy a rövidebbik oldala éppen megegyezzen a keret rövidebbik oldalának hosszával, vagy hogy a hosszabbik oldala tegye ugyanezt. Az első esetben a képet a 4,5-szörösére, a második esetben a képet a 4-szeresére kell nagyítani. Az első esetben a kép 27 cm-esre változott oldalából kell 3 cm-t levágni, vagyis a kép $\frac{1}{9}$ része lesz hulladék. A második esetben a 4 cm-es oldal 16 cm-re változik, vagyis a keretből egy 2 cm széles rész lesz üres, ami $\frac{1}{9}$ része a keretnek.

C. 1702. Határozzuk meg az összes olyan háromjegyű négyzetszámot, amelynek számjegyeit átrendezve ismét egy négyzetszámot kaphatunk!

Megoldás: A háromjegyű négyzetszámok 144; 169; 196; 225; 256; 289; 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 841; 900; 961. A felsorolt számok számjegyeit megvizsgálva az alábbi csoportokat készíthetjük, melyekben található számok azonos számjegyekből állnak, ezért nyilvánvalóan megfelelnek a feladat feltételeinek: 169 – 196 – 961; 144 – 441; 256 – 625.

C. 1703. Gabiék minden télen a cinkéknek és a rigóknak úgynevezett madárgolyót helyeznek ki a teraszra. Ezt csipegetve a madarak könnyebben átvészelik a telet. A golyó fel van lógatva egy faágra, így amikor a cinkék és a rigók rászállnak, mindig egy része lepotyog a földre, ahonnan már csak a verebek szedik össze. Egy ilyen golyóban egy cinkének öt hétre elegendő csipegetnivaló lenne, ha nem szóródna le a földre egy része, feltéve, hogy a cinke egész nap rájárna. Gabi megfigyelte, hogy 4 cinke jár rá a golyóra minden nap, a napok második felében pedig mindig 6 rigó csatlakozik hozzájuk. A tapasztalat azt mutatja, hogy az elfogyasztott mennyiséghez képest annak hatodrésze hullik le a földre, és jut a verebeknek. Hányszor annyit eszik egy rigó, mint egy cinke, ha három nap alatt elfogy egy ilyen golyó a teraszon?

Megoldás: Legyen az egy cinke által fél nap alatt elfogyasztott eledel mennyisége egységnyi. Mivel egy cinkének 5 hétre lenne elegendő, ezért a golyóban levő anyag 70 egységnyi. A hulladék a hetede az összes mennyiségnek, így átlagosan a golyó $\frac{10}{70}$ része hullik le a földre, azaz a ténylegesen elfogyasztható mennyiség 60 egységnyi. Mivel ez 3 nap alatt elfogy, ezért napi 20 egységnyi a fogyás. A cinkék naponta 8 egységnyit esznek meg, így az összes rigó félnaponta 12 egységnyit, azaz egy rigó napi 4 egységnyit fogyaszt el. Tehát egy rigó kétszer annyit eszik, mint egy cinke.

C. 1704. Katinak van egy fényképe, amelynek az eredeti mérete 4×6 cm. Van három képkerete, melyek mérete 18×24, 16×20 és 22×30 cm. Mindhárom kerethez elkészítteti a fényképének azt a legnagyobb nagyítását, mellyel a kép még belefér a keretbe. Melyik képkeret esetén tölti ki a legnagyobb százalékban a kép a rendelkezésre álló keretet?

Megoldás: A fényképet kétféleképpen lehet nagyítani, úgy, hogy a rövidebbik oldala éppen megegyezzen a keret rövidebbik oldalának hosszával, vagy hogy a hosszabbik oldala tegye ugyanezt. Azt a nagyítást kell alkalmazni, amelyiknél a másik oldal nem lóg ki a képkeretből. Készítsünk egy táblázatot az arányokról!

Képkeret (cm×cm)	Rövidebbik oldal aránya a képhez képest	Hosszabbik oldal aránya a képhez képest	Használt nagyítási arány	Kitöltött terület nagysága (cm×cm)	Kitöltés aránya
18×24	9 : 2	4 :1	4 :1	16×24	8 : 9 = 88,89%
16×20	4 :1	10 : 3	10 : 3	40/3×20	5 : 6 = 83,33%
22×30	11: 2	5 :1	5 :1	20×30	10 :11 = 90,91%

Tehát a 22×30 cm-es képkeret esetén a legnagyobb a keret kitöltésének aránya.

C.1705. Töltsük ki az ábrán látható négyzeteket a 0-9 számjegyek egyszeri felhasználásával úgy, hogy mindhárom műveletsornak 4 legyen az eredménye! Keressünk olyan megoldást is, amelyben mindegyik műveletsornak 0 az eredménye!

$$\square : \square \cdot \square$$
$$\square + \square \cdot (\square - \square)$$
$$\square - \square \cdot \square$$

Megoldás: Például, ha 4 az eredmény: $6:3\cdot 2$; $4+0\cdot(8-7)$; $9-1\cdot 5$. 0 az eredmény: $5:1\cdot 0$; $6+3\cdot(7-9)$; $8-4\cdot 2$.

C.1706. A táblázat üres négyzeteibe írhatunk egy-egy X-et. A négyzetekben levő számok azt mutatják, hogy az adott négyzettel csúcsban vagy élben érintkező négyzetekben összesen maximum hány db X lehet. Mutassuk meg, hogy hat db X már nem írható be a táblázatba! Hányféleképpen tudunk 5 db X-et beírni? (Adjuk meg az összes lehetséges megoldást!)

2		1
	3	
1		2

Megoldás: Az ábrán látható, hogy a b-től i-ig terjedő négyzetekbe összesen 3 db X tehető. Az a és j mezőre még jó esetben letehető további 1-1 db, ez összesen 5, így 6 db X nem fér a táblára. 5 db is csak úgy helyezhető el, ha az a és j mezőn van egy-egy X, ekkor viszont a c és d, valamint a g és h mezőkön nem lehet X. Tehát a b, e, f, i mezőkön kell hármat elhelyeznünk. Ez összesen 4-féleképpen valósítható meg, így 4 lehetséges elrendezés van, amelyek az alábbi táblázatokban láthatóak.

2	a	1
b	c	d
e	3	f
g	h	i
1	j	2

2	X	1
X		
X	3	X
1	X	2

2	X	1
X		
X	3	
		X
1	X	2

2	X	1
X		
	3	X
		X
1	X	2

2	X	1
X	3	X
		X
1	X	2

C.1707. Egy számegyenesen az egész számok helyét kiszínezzük egy-egy piros vagy kék ponttal.

a) Lehet-e úgy választani a színezést, hogy két azonos színű pont távolsága ne legyen sem 5, sem 7 egység?

b) Lehet-e úgy választani a színezést, hogy két azonos színű pont távolsága ne legyen sem 6, sem 11 egység?

Megoldás: ***a)*** Igen, lehet. A páros számok helye legyen például piros, a páratlanoké pedig kék színű.

b) Nem lehet. Legyen az 1 például piros színű. Ekkor a 7 kék, a 13 piros, a 19 kék, a 25 piros, 14 kék, 20 piros, 9 kék, 15 piros, 4 kék, 10 piros, 16 kék, 5 piros, 11 kék, 17 piros, 6 kék, 12 piros, 1 kék, ami ellentmondás, mert az piros volt.

Másképpen: Próbáljunk meg megfelelően színezni, legyen a 0 piros, ekkor $6=1\cdot 6$ kék, $12=2\cdot 6$ piros, …, $66=11\cdot 6$ kék kell hogy legyen. Hasonlóképpen $11=1\cdot 11$ kék, $22=2\cdot 11$ piros, …, $66=6\cdot 11$ piros kell hogy legyen, vagyis a 66-hoz nem találhatunk megfelelő színt.

C.1708. Egy teremben elhelyezünk 12 asztalt. 100 véletlenszerűen kiválasztott embert beküldünk a terembe, és megkérjük őket, hogy születési hónapjuk szerint csoportosítva álljanak az asztalok köré. Keressük meg azt az asztalt, amelyik körül a legkevesebben állnak, legyen itt X fő. Keressük meg azt az asztalt is, ahol a legtöbben állnak, legyen itt Y fő. Határozzuk meg X lehető legnagyobb értékét és Y lehető legkisebb értékét!

Megoldás: Sejthető, hogy X legnagyobb értéke, illetve Y legkisebb értéke akkor jön létre, ha nagyjából egyforma létszámú ember áll minden asztalnál. Ha egyenletesen próbáljuk meg elosztani a 100 embert a 12 asztalhoz, akkor 8 és 9 fő lesz egy-egy asztalnál. Tehát az állításunk, hogy X legnagyobb értéke 8, Y legkisebb értéke 9. Ezek az értékek meg is valósulhatnak, pl. ha négy asztalnál 9-9, a többi asztalnál 8-8 ember áll. Ha a legkisebb létszámú asztalnál 9-en vagy többen lennének, akkor ez minden asztalra igaz lenne, vagyis az emberek száma $9\cdot 12$ vagy több lenne, de ez 100-nál több embert jelentene. Ha a legnagyobb létszámú asztalnál 8-an vagy kevesebben lennének, akkor ez minden asztalra igaz lenne, vagyis az emberek száma $8\cdot 12$ vagy kevesebb lenne, de ez 100-nál kevesebb embert jelentene. Tehát X maximuma 8, Y minimuma 9.

C.1709. ***a)*** Keressük meg az összes olyan háromjegyű számot, amely egyenlő számjegyei szorzatának négyszeresével!
b) Találunk-e olyan háromjegyű számot, amely egyenlő a számjegyei szorzatának kétszeresével?

Megoldás: ***a)*** A keresett szám mindenképpen osztható 4-gyel, hiszen a számjegyek szorzatának négyszeresével egyenlő. Így az utolsó számjegye páros, de emiatt a számjegyek szorzatának négyszerese nemcsak 2-nek, hanem 8-nak is (és persze 4-nek is) többszöröse lesz. Tehát a keresett háromjegyű szám osztható 8-cal, az utolsó két számjegyéből álló kétjegyű szám pedig osztható 4-gyel. A szám nem tartalmazhat 0-t egyik helyi értéken sem, mert ebben az esetben a számjegyek szorzata 0 lenne. A számban 5-ös számjegy sem szerepelhet, mert ekkor a számjegyek szorzatának négyszerese 0-ra végződne, tehát a szám is 0-ra végződne. Mivel egy háromjegyű szám legalább akkora, mint az első számjegyének 100-szorosa, ezért a három számjegy szorzatának négyszerese legalább az első számjegy 100-szorosa, így az utolsó két számjegy szorzata legalább 25. Emiatt az utolsó számjegy nem lehet 2. Figyelembe véve az előzőekben mondott feltételt és a 4-gyel oszthatóságot, az alábbi lehetséges értékeket kapjuk az utolsó két számjegyre: 84; 76; 96; 48; 68; 88. Mivel egy háromjegyű szám 1000-nél kisebb, ezért a számjegyek szorzata 250-nél kisebb. Figyelembe véve, hogy csak a 8-cal osztható számok felelhetnek meg, a szóba jöhető végződéseket az alábbi módon egészíthetjük ki egy első számjeggyel háromjegyű számmá:

184; 384; 784	176; 376	296; 496
148; 348; 748	168; 368	288

Ezeket a számokat pl. a számjegyek szorzatának négyszeresének utolsó számjegyét ellenőrizve a 384 kivételével kizárhatjuk, a 384 viszont tényleg $3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4$, vagyis egyetlen ilyen szám van, amely a feltételeknek megfelel.

b) Az ***a)*** feladatban alkalmazott gondolatmenettel az alábbi következtetésekre juthatunk: a keresett szám osztható 4-gyel, utolsó számjegye páros, egyik számjegye sem lehet 0 vagy 5, utolsó két számjegyének szorzata legalább 50.

Ez utóbbi feltétel kizárja a 0; 2; 4-re végződő számokat, a 6-ra végződők közül csak a 96-ra, a 8-ra végződők közül csak a 78; 88; 98-ra végződők jöhetnek szóba, de a 4-gyel oszthatóság miatt csak a 96 és a 88 marad meg lehetőségként. Mivel a 96-os végződés esetén a számnak 9-cel oszthatónak kell lenni (a számjegyek szorzata osztható 9-cel), ezért csak a 396 jöhet szóba. Ez nem teljesíti az eredeti feltételt: $3 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 2 = 324$.

A 88-as végződés esetén a számjegyek szorzata 8-cal mindenképpen osztható, így csak a 288; 488; 688; 888 merül fel lehetőségként. A számjegyek szorzatának kétszerese ezek esetében rendre $4 \cdot 64$, $8 \cdot 64$, $12 \cdot 64$ és $16 \cdot 64$, ezek közül csak a $12 \cdot 64$ végződik 8-ra, de $12 \cdot 64 = 768$, így nem találunk a feltételnek megfelelő háromjegyű számot.

* * * * *

A matematika humora

Egy ember pizzát vásárol. Kérdezi az eladó: 6 vagy 8 felé vágjam?

– Legyen 6. Nem hiszem, hogy 8 szeletet meg tudnék enni.

Róka Sándor: A matematika humora

Az ABACUS pontversenyének állása a 3. forduló után 3. osztály

1. Lukucz Barnabás *(Újpesti Károlyi István Ált. Isk. és Gimnázium, Bp. IV.)* 95 p; **2.** Greif Zsuzsanna *(Gödöllői Erkel Ferenc Általános Iskola, Gödöllő)* 93 p; **3.** Koczka Sára *(Szent István Sport Ált. Isk. és Gimn., Jászberény),* Kulinyi Mira *(Budapest School Ált. Isk. és Gimn. Budaörsi Th., Budaörs),* Papp Trisztán Márk *(Dr. Béres József Ált. Isk. (Kiserdő), Budapest III.),* Szabo Levente *(La Zolla Scuola Primaria, Milano)* 91 p; **7.** Berecz Balázs János *(Szőnyi Benjámin Református Ált. Isk., Hódmezővásárhely),* Drozdy Győző Levente *(Brit-Magyar Kéttannyelvű Általános Iskola, Budapest),* Fehér Elza *(Kodály Zoltán Magyar Kórusiskola, Bp. I.)* , Győrffy Balázs *(Nagykovácsi Általános Iskola, Nagykovácsi),* Ódor Boldizsár *(Felsőgallai Széchenyi István Általános Iskola, Tatabánya),* Püspöki Sebestyén *(SZTE Juhász Gyula Gyakorló Ált. Iskola, Szeged),* T. Szabó Richárd *(Karolina Általános Iskola és Gimnázium, Szeged)* 90 p; **14.** Jász Borbála *(Újlaki Általános Iskola, Bp. II.),* Kukovecz György *(SZTE Gyakorló Gimn. és Ált. Isk., Szeged)* 89 p; **16.** Csákai Dorka *(Kecskeméti Református Általános Iskola, Kecskemét),* Kallós Bertalan *(Szent Imre Kat. Gimn., ÁI., Koll., Óv. és AMI, Nyíregyháza),* Kardos Kázmér *(Barcsay Jenő Általános Iskola, Szentendre),* Kavalecz-Szücs Bertalan *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.),* Tóth Dávid *(SZTE Juhász Gyula Gyakorló Ált. Iskola, Szeged)* 88 p; **21.** Keresztes Áron *(KBZIÁI Béke Általános Iskolája, Kecskemét),* Tóth Hanna *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.)* 87 p; **23.** Kozák Milán *(Szent Imre Katolikus Általános Iskola, Kecskemét)* 86 p; **24.** Gyenge Vince Barnabás *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.)* 85 p; **25.** Szijj Hanna Kira *(Kecskeméti Vásárhelyi Pál Ált. Isk. és AMI, Kecskemét)* 84 p; **26.** Dongó Helga Gizella *(Petőfi Sándor Katolikus Általános Iskola, Kecskemét),* Drenyovszki Csaba *(Szent Imre Katolikus Általános Iskola, Kecskemét),* Stecbauer Zsófia Mária *(Dr. Béres József Ált. Isk. (Kiserdő), Budapest III.)* 82 p; **29.** Ruzsa Tibor Ádám *(N. B. Román Gimn., Ált. Isk. és Koll., Gyula)* 80 p; **30.** Szalóky Péter *(Domokos Pál Péter Ált. Isk., Bp. XI.)* 77 p; **31.** Siket Dorina *(SZTE Gyakorló Gimn. és Ált. Isk., Szeged)* 73 p; **32.** Király Flóra *(Grassalkovich Antal Általános Iskola, Bp. XXIII.),* Mucsi Mira *(Petőfi Sándor Katolikus Általános Iskola, Kecskemét)* 72 p; **34.** Gurmai Áron *(Tüköry Lajos Általános Iskola és AMI, Körösladány)* 71 p; **35.** Ajtai Emília *(SZTE Gyakorló Gimn. és Ált. Isk., Szeged),* Heuer Nadin *(Dr. Béres József Általános Iskola, Bp. III.)* 69 p; **37.** Szigetvári Csaba Hunor *(Szent Imre Katolikus Általános Iskola, Kecskemét)* 68 p; **38.** Klausz Emma *(Szent Imre Katolikus Általános Iskola, Kecskemét)* 67 p; **39.** Bányász Gergő *(Lágymányosi Bárdos Lajos KTNy. Ált. Isk., Bp. XI.)* 60 p; **40.** Mikusi Gergely Bálint *(Dr. Béres József Ált. Isk. (Kiserdő), Budapest III.)* 59 p; **41.** Sziráki-Lakós Ruti *(Mindszenty József Ált. Isk. és Gimn., Zalaegerszeg),* Váci Bianka *(Dr. Béres József Ált. Isk. (Kiserdő), Bp. III.)* 58 p; **43.** Szegesdi Bendegúz *(Dr. Béres József Ált. Isk. (Kiserdő), Bp. III.)* 57 p; **44.** Mohammed Amir *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.)* 53 p; **45.** Mirkóczki Áron *(Kecskeméti Vásárhelyi Pál Ált. Isk. és AMI, Kecskemét),* Parádi Emma Kata *(Vásárhelyi Pál ÁI. és AMI Móricz Zsigmond ÁI., Kecskemét)* 49 p; **47.** Eszik Ábel *(SZTE Gyakorló Gimn. és Ált. Isk., Szeged)* 48 p; **48.** Karsai Kira *(SZTE Gyakorló Gimn. és Ált. Isk., Szeged),* Mirkóczki Máté *(Kecskeméti Vásárhelyi Pál Ált. Isk. és AMI, Kecskemét)* 44 p;

50. Bukovits Ágnes *(Dr. Béres József Ált. Isk. (Kiserdő), Bp. III.),* Végh Gergő Zoltán *(SZTE Gyakorló Gimn. és Ált. Isk., Szeged)* 30 p. *(Kevesebb pontja van 3 tanulónak.)*

Az ABACUS pontversenyének állása a 3. forduló után 4. osztály

1. Kun Fruzsina *(DE Kossuth Lajos Gyak. Gimn. és ÁI. 003, Debrecen)* 96 p; **2.** Gyarmati Edina Éva *(Göllesz Viktor Általános Iskola, Bp.)* 95 p; **3.** Maróti Gábor *(Tiszaparti Általános Iskola, Szeged),* Mészáros Viola Anna *(Gárdonyi Géza Általános Iskola, Bp. XIII.),* Plugor Hunor *(Karolina Általános Iskola és Gimnázium, Szeged),* Sógor-Jász Regő *(SZTE Juhász Gyula Gyakorló Ált. Iskola, Szeged)* 94 p; **7.** Harangozó Alma *(Zugligeti Általános Iskola, Bp. XII.),* Juhász Alíz Maja *(Hunyadi Mátyás Általános Iskola, Bp. XIII.),* Kiss-Zichler Ábel *(Szent II. János Pál Iskolaközp, Bp. XI.)* 93 p; **10.** Csupor Zente Félix *(Karolina Általános Iskola és Gimnázium, Szeged)*, Fejérvári Bíbor *(Péterfy Sándor Evangélikus Gimn., ÁI. és Óv., Győr),* Goneth Zoé *(Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Ált. Isk. és Gimn., Bp. VIII.),* Gyarmati Dániel *(Sashalmi Tanoda Általános Iskola, Bp. XVI.)* Rédei Lőrinc *(Rókusi Általános Iskola, Szeged)* Tóth Marcell *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.)* 92 p; **16.** Csatlós Sára *(Rókusi Általános Iskola, Szeged)* Rózsavölgyi Gergely Péter *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.),* Széll Luca *(ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk. és Gimn., Bp. XIV.)* 91 p; **19.** Kocka Szofia *(Fazekas Mihály Általános Iskola, Dunakeszi),* Tóth-Almásy Kornél *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.),* Varga Zsolt *(SZTE Juhász Gyula Gyakorló Ált. Iskola, Szeged)* 90 p; **22.** Kardos Zsombor *(Tüköry Lajos Általános Iskola és AMI, Körösladány),* Róna Bence *(Szent Imre Katolikus Általános Iskola, Kecskemét)* 89 p; **24.** Domokos Mátyás *(Széchenyi István Kat. és Német Nemz. ÁI., Mátészalka),* Holderith Kata *(Jókai Mór Általános Iskola, Bp. XVI.)* , Szilágyi Zétény *(Nagy László Ált. Isk. és Gimn., Budapest XX.),* Varga Dóra *(Teleki Blanka Általános Iskola, Budapest XI.),* Zawadowski Laura *(Szent Gellért Kat. Ált. Isk. és Gimn., Bp. I.)* 88 p; **29.** Leitem Hajnal *(Kossuth Lajos Ált. Isk. Intézményegység, Ballószög)* 87 p; **30.** Bokor Nándor *(SZTE Juhász Gyula Gyakorló Ált. Iskola, Szeged)*, Illés Tamás Gellért *(Néri Szent Fülöp Kat. Ált. Isk., Bp. XVI.),* Marsa Vencel *(Vásárhelyi Pál ÁI. és AMI Móricz Zsigmond ÁI., Kecskemét)* 86 p; **33.** Auer Balázs *(Marianum Német Nemzetiségi Nyelvokt. ÁI., Érd)* 85 p; **34.** Kappel Dániel *(SZTE Juhász Gyula Gyakorló Ált. Iskola, Szeged)* 84 p; **35.** Kubránszky Gergő *(Petőfi Sándor Katolikus Általános Iskola, Kecskemét)* 83 p; **36.** Korpácsi Áron *(Kecskeméti Vásárhelyi Pál Ált. Isk. és AMI, Kecskemét)* 82 p; **37.** Kovács Viktor *(Apor Vilmos Katolikus Iskolaközp, Győr)* 79 p; **38.** Hahn Gabriella Anna *(Piarista Ált. Isk. és Gimn., Kecskemét)* 77 p; **39.** Békési Barnabás *(Kecskeméti Vásárhelyi Pál Ált. Isk. és AMI, Kecskemét)* 68 p; **40.** Nelissen Emma-Zsófia Zselyke *(SZTE Gyakorló Gimn. és Ált. Isk., Szeged)* 59 p; **41.** Lackó Áron *(Néri Szent Fülöp Kat. Ált. Isk., Bp. XVI.)* 56 p; **42.** Beöthy Marcell *(Kecskeméti Vásárhelyi Pál Ált. Isk. és AMI, Kecskemét)* 51 p; **43.** Sziráki-Lakós Tádé *(Mindszenty József Ált. Isk. és Gimn., Zalaegerszeg)* 49 p; **44.** Insperger Marcell *(Kelenvölgyi Általános Iskola, Bp. XI.)* 43 p; **45.** Lipták Erzsébet *(Huzella Tivadar Általános Iskola, Göd)* 32 p; **46.** Fodor Balázs *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.)* 30 p. *(Kevesebb pontja van 3 tanulónak.)*

Az ABACUS pontversenyének állása a 3. forduló után 5. osztály

1. Csala Márton *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.)* 92 p; **2.** Pach Benjamin *(Kempelen Farkas Gimn., Bp. XXII.),* Rózsa Liliána *(Kempelen Farkas Gimn., Bp. XXII.)* 91 p; **4.** Somogyi Marcell *(Kazinczy Ferenc Gimnázium, Győr),* Szőllősy Lilla *(Budai Városkapu Óvoda, ÁI. és AMI, Pécs)* 90 p; **6.** Kilin Sára *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 89 p; **7.** Garai-Szabó Botond *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.)* 88 p; **8.** Petrányi Nóra *(Petőfi Sándor Katolikus Általános Iskola, Kecskemét)* 86 p; **9.** Virág Ákos *(Móra Ferenc Általános Iskola, Budapest XIV.)* 85 p; **10.** Fehér Donát *(Kodály Zoltán Magyar Kórusiskola, Bp. I.),* Fehér Zsigmond *(Kodály Zoltán Magyar Kórusiskola, Bp. I.)* , Fekete Janka Júlia *(MNOÖ Koch Valéria Ált. Isk. és Középisk., Pécs),* Szabó László *(Thököly Imre Két Tanítási Nyelvű Ált. Isk., Hajdúszoboszló)* 84 p; **14.** Kiss Gusztáv Gábor *(Áldás Utcai Általános Iskola, Bp. II.),* Kocsis Ákos *(Osztrák-Magyar Európaiskola, Bp. XII.)* 83 p; **16.** Mátyás Márk László *(Fillér Utcai Ált. Isk., Bp. II.)* 81 p; **17.** Csonka Misa *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.)* 80 p; **18.** Németh Eszer Réka *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.)* 79 p; **19.** Agárdi Roland *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Berzsán Gábor *(Toponári Tagiskola, Kaposvár),* Bodnár Áron *(Andor Ilona É-Z. Ált. és Alapf. Műv. Baptista Isk., Bp. III.)* 78 p; **22.** Bertók Benedek *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.)* 76 p; **23.** Farkas-Kis Olivér *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 74 p; **24.** Nagy Bende Dénes *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 72 p; **25.** Kelényi Kornél *(Kaffka Margit Általános Iskola, Bp. XIV.)* 70 p; **26.** Jankovics Veronika *(Szent József Katolikus Ált. Isk. és Gimn., Bp. III.),* Koren Mihály Máté *(Baár-Madas Református Gimn. és Ált. Isk., Bp. II.)* 69 p; **28.** Jankovics Lilla *(Szent József Katolikus Ált. Isk. és Gimn., Bp. III.)* 67 p; **29.** Németh István Marcell *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.),* Rikker Márton *(Fabriczius József Általános Iskola, Veresegyház),* Wang Luomeng *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 66 p; **32.** Szép Belián *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 64 p; **33.** Bertai Áron *(Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét),* Köblös Koppány *(Kőkúti Általános Iskola, Tata)* 63 p; **35.** Czett Loránd *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Vitale Zénó *(Wéber Ede Közpi ÁI. Intézményegység, Helvécia)* 62 p; **37.** Lugosi Bence *(Nagy László Ált. Isk. és Gimn., Bp. XX.)* 61 p; **38.** Kostrigina Mariia *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 60 p; **39.** Lévai-Szeklár Bulcsú *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.)* 59 p; **40.** Behán Emma *(Bethlen Gábor Református Gimnázium, Hódmezővásárhely)* 58 p; **41.** Benkő Benett *(Nagy László Ált. Isk. és Gimn., Bp. XX.)* 57 p; **42.** Antal Máté *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Asztalos Sebestyén *(Nagy László Ált. Isk. és Gimn., Bp. XX.)* 56 p; **44.** Murányi Míra Noémi *(Bartók Béla Magyar-Angol KTNy Ált. Isk., Bp. XXII.)* 52 p; **45.** Bányász Anna *(Szilágyi Erzsébet Gimnázium, Bp. I.)* , Robák Kornél *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 51 p; **47.** Marton Melinda *(ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk. és Gimn., Bp. XIV.)* 49 p; **48.** Petőfi Hunor *(Eötvös Iskola, Lakitelek)* 48 p; **49.** Viczkó Júlia Sára *(ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk. és Gimn., Bp. XIV.)* 47 p; **50.** Liss Alma *(Kodály Zoltán Ének-Zenei ÁI. és Gimn., Kecskemét)* 43 p; **51.** Petz Richárd *(Széchenyi István Egyetem Öveges Kálmán Gyak. ÁI., Győr)* 42 p; **52.** Buday Bánk *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 39 p; **53.** Váradi Miklós *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 38 p;

54. Angel Emma Júlia *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 37 p; **55.** Némedi László *(Bethlen Gábor Református Gimnázium, Hódmezővásárhely),* Sziráki-Lakós Fáni *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 34 p; **57.** Ágoston Zente *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Bene Csaba *(Kempelen Farkas Gimnázium, Budapest XXII.)* 32 p; **59.** Mühl Bálint Mátyás *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 30 p. *(Kevesebb pontja van 20 tanulónak.)*

Az ABACUS pontversenyének állása a 3. forduló után 6. osztály

1. Lénárt Kinga *(Premontrei Szent Norbert Gimnázium, Gödöllő)* 95 p; **2.** Csala Mihály *(Teleki Blanka Általános Iskola, Bp. XI.),* Kallós Klára *(Szent Imre Kat. Gimn., ÁI., Koll., Óv. és AMI, Nyíregyháza)* 92 p; **4.** Bőhm Lujza *(ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk. és Gimn., Bp. XIV.)* 90 p; **5.** Horváth Maja *(Általános Iskola, Gyömöre),* Szemző Eszter *(Szilágyi Erzsébet Gimnázium, Bp. I.),* Szőllősy Borbála *(Budai Városkapu Óvoda, ÁI. és AMI, Pécs)* 88 p; **8.** Fitos Bendegúz *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Vistan Máté *(Márai Sándor MTNy Gimnázium és Alapisk., Kassa)* 87 p; **10.** Ódor Holló *(Felsőgallai Széchenyi István Általános Iskola, Tatabánya),* Palik Szabolcs *(Johannes-Gutenberg-Gymnasium, Waldkirchen)* 84 p; **12.** Nelissen Bendegúz *(SZTE Gyakorló Gimn. és Ált. Isk., Szeged),* Sághi Zoltán *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.),* Tóth Máté *(Eötvös József Református Oktatási Közp, Heves),* Varga Vanda *(Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét)* 83 p; **16.** Kurenkov Botond Borisz *(Zrínyi Ilona Általános Iskola, Kecskemét)*, Pálmai-Szargszjan Mátyás *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.)***,** Tóth-Tarnawa Bori *(ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk. és Gimn., Bp. XIV.)* 79 p; **19.** Li Mingdao *(Bem József Általános Iskola, Bp. X.),* Török Viola *(Hunyadi János Általános Iskola, Dunaharaszti)* 78 p; **21.** Kislinder Ervin *(Jedlik Ányos Gimnázium, Bp. XXI.),* Szilágyi-Nyeste Sámuel *(Óbudai Harrer Pál Általános Iskola, Bp. III.)* 77 p; **23.** Menyhárt Tamás *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 76 p; **24.** Dömők Dávid *(Kőbányai Keresztury Dezső Ált. Isk., Bp. X.),* Poptodorov-Kirilov Ádám *(Batthyány Kázmér Gimnázium, Szigetszentmiklós)* 74 p; **26.** Méhes Anna Borbála *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 73 p; **27.** Bartko Bence *(Kodály Zoltán Ének-Zenei ÁI. és Gimn., Kecskemét),* Bartko Botond *(Kodály Zoltán Ének-Zenei ÁI. és Gimn., Kecskemét),* Katona Csanád *(Budapest Fasori Evangélikus Gimnázium, Bp. VII.),* Sárközi Ármin *(ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk. és Gimn., Bp. XIV.)* 71 p; **31.** Poptodorov-Kirilov Bence *(Batthyány Kázmér Gimnázium, Szigetszentmiklós)* 69 p; **32.** Galambos Léna *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.),* Soponyai Zorka *(Kodály Zoltán Ének-Zenei ÁI. és Gimn., Kecskemét)* 68 p; **34.** Balogh Richárd *(International School of Budapest, Bp. XII.)* 64 p; **35.** Bun Luca *(Szilágyi Erzsébet Gimnázium, Bp. I.),* Németh Ákos *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 61 p; **37.** Berecz Emese Tünde *(Bethlen Gábor Református Gimnázium, Hódmezővásárhely)* 60 p; **38.** Borbély Barnabás *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Laudán Léna *(International School of Budapest, Bp.),* Polgár András *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.),* Székely Bulcsú *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.)* 59 p; **42.** Szabó Hanga *(Kempelen Farkas Gimnázium, Budapest XXII.)* 58 p; **43.** Antal Melinda Nóra *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 56 p; **44.** Horváth Ákos *(Petőfi Sándor*

Katolikus Általános Iskola, Kecskemét) 55 p; **45.** Haltenberger Ádám *(International School of Budapest, Bp. XII.)* 52 p; **46.** Takács Erik Dénes *(Lauder Javne Zsidó Közösségi Iskola, Bp. XII.)* 49 p; **47.** Majoros Tamás *(Kövy Sándor Általános és Alapfokú Műv. Isk., Nádudvar),* Noszek László Barnabás *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 48 p; **49.** Czirják Imre *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 37 p; **50.** Ádám Barnabás *(Széchenyi István Egyetem Öveges Kálmán Gyak. ÁI., Győr),* Lettner Levente *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 33 p. *(Kevesebb pontja van 5 tanulónak.)*

Az ABACUS pontversenyének állása a 3. forduló után 7. osztály

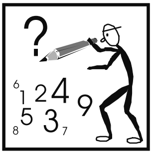
1. Ekler Péter *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Jámbor András *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.)* 100 p; **3.** Deli Márton *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen)* 99 p; **4.** Csikai Tímea *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.),* Rotter Szabolcs *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.)* 97 p; **6.** Fejérvári Villő *(Péterfy Sándor Evangélikus Gimn., ÁI. és Óv., Győr)* 96 p; **7.** Fekete Ákos *(Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét)* 95 p; **8.** Biró Beáta *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen),* Szakács Benjámin *(Jedlik Ányos Gimnázium, Bp. XXI.),* Tóth Kristóf Manó *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.)* 94 p; **11.** Majzik Katalin *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.)* 92 p; **12.** Ács Soma Szilárd *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.),* Blaskovics Bálint *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 91 p; **14.** Bozóki Zénó *(Hajós Alfréd Általános Iskola, Bp. XIV.)*, Győrffy Réka Rebeka *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen)* 88 p; **16.** Schneider Viola *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 86 p; **17.** Szabó Jázmin *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 82 p; **18.** Nagy András *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 81 p; **19.** Frank Mira *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Hegyi Bálint Botond *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Kámán-Tóth Kata *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Reimholz Emma *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Szabó Zsombor *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 80 p; **24.** Dong Xueni *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)*, Seres Barnabás *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 79 p; **26.** Kaszab Kristóf István *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen),* Seder Péter *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.)* 78 p; **28.** Becker Borbála Réka *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Győrffy Levente *(Nagykovácsi Általános Iskola, Nagykovácsi)* 76 p; **30.** Gyúri Benedek *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 75 p; **31.** Ruhland Anna-Katharina *(Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét)* 74 p; **32.** Bálint Benedek *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen),* Jánosi Bence *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.),* Reiner Bercel Róbert *(Jedlik Ányos Gimnázium, Bp. XXI.)* 73 p; **35.** Laukó Zalán *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Tiszay Anna *(Sashalmi Tanoda Általános Iskola, Bp. XVI.)* 72 p; **37.** Farkas-Kis Boldizsár *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)*, Szabó Lilla Ágnes *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 71 p; **39.** Tóth Sámuel *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 70 p; **40.** Szabó Ábel *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 69 p; **41.** Nagy Levente Félix *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Sipos Bianka *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Sőtér Hunor Marcell *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 68 p; **44.** Schulz Botond *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 67 p; **45.** Sőtér Jázmin Sára *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 66 p; **46.** Molnár Benedek *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Pásztor Előd *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 65 p; **48.** Kis Vilmos *(Fazekas Mihály Gimnázium,* *Debrecen)* 64 p; **49.** Angyalföldi Gergő *(Jedlik Ányos Gimnázium, Bp. XXI.),* Fu Zhicheng *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Hanich András Dániel *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 62 p; **52.** Molnár Gábor Dávid *(Teleki Blanka Gimn. és Ált. Isk., Székesfehérvár),* Rikker Dóra *(Fabriczius József Általános Iskola, Veresegyház),* Schwartz Bence *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Uzonyi Vilmos *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 61 p; **56.** Balogh Bence *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Ilija Botond *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Mészáros Bendegúz Soma *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Zawadowski Júlia *(ELTE Apáczai Gimnázium, Bp. V.)* 60 p; **60.** Entz Dominika Dóra *(Szent Imre Általános Iskola és Óvoda, Székesfehérvár)* 59 p; **61.** Takács Benedek *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.)* 57 p; **62.** Beöthy-Kiss Marcell Dániel *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 56 p; **63.** Békési Barnabás *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 55 p; **64.** Körmendy Viktória *(Jedlik Ányos Gimnázium, Bp. XXI.),* Petrányi Zsófia *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Varga Liliána *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen)* 54 p; **67.** Lexa Ádám *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Marosi Réka *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.),* Nagy Ákos *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 51 p; **70.** Prisztóka Dóra *(Veres Pálné Gimnázium, Bp. V.),* Rács Torda *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Weiner Sofia *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.)* 50 p; **73.** Kovács Sarolta *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen),* Tamasi Sámuel *(Kecskeméti Református Általános Iskola, Kecskemét)* 49 p; **75.** Gédra Máté *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* , Petrovits Marcell *(Szent István Gimnázium, Budapest XIV.)* 48 p; **77.** Atzél Bálint Richárd *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Bilau Gellért *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.),* Kismarczi Botond Attila *(Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét)*, Márien Emese *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Moson Miléna *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Szőnyi Artúr *(Baár-Madas Református Gimn. és Ált. Isk., Bp. II.)* 47 p; **83.** Galambos-Nagy Csaba *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.),* Murányi Nimród Máté *(Bartók Béla Magyar-Angol KTNy Ált. Isk., Bp. XXII.)* 45 p; **85.** Ember Dávid Jenő *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Oláh Dömötör *(Szent István Gimnázium, Budapest XIV.)* 44 p; **87.** Ádám Attila *(Szent István Gimnázium, Budapest XIV.),* Lazarovits Frida *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 43 p; **89.** Ambrus-Szabó Zsolt *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Knausz Kinga Barbara *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Kovács Martin *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Ujj Rebeka *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 42 p; **93.** Kostrigina Anna *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Ráczkövi Tamás *(Árpád Gimnázium, Budapest III.)* 41 p; **95.** Temesi Jeromos *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 40 p; **96.** Pálfalvi Luca *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* , Strausz Lukács *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 39 p; **98.** Juhász Olivér *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Kelényi Henriett *(Szent István Gimn., Bp. XIV.)* 37 p; **100.** Kárpáti Nina *(Kempelen Farkas Gimn., Bp. XXII.),* Mészáros-Komáromy Sarolta *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.)* 36 p; **102.** Babos Vivien *(Veres Pálné Gimnázium, Bp. V.)* 35 p; **103.** Martincsek Balázs Áron *(Szentendrei Református Gimnázium, Szentendre)* 34 p; **104.** Civin-Palásthy Péter *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Weidinger Márton Patrik *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 33 p; **106.** Fülöp Levente *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen)* 32 p; **107.** Kaiser Patrik *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Kerekes Bulcsú Olivér *(Gárdonyi Géza Általános Iskola,* *Bp. XI.),* Lipták Mária *(Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium, Dunakeszi),* Pataki Eszter *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Wiener Marcell *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 31 p; **112.** Mück Dominik *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen)* 30 p. *(Kevesebb pontja van 18 tanulónak.)*

Az ABACUS pontversenyének állása a 3. forduló után 8. osztály

1. Bense Tamás *(Eötvös József Gimnázium, Bp. V.)* 109 p; **2.** Balla Ignác *(ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk. és Gimn., Bp. XIV.),* Fejes Tóth Fanni *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 108 p; **4.** Izsa Ferenc Gergő *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.),* Rózsa Péter *(Kempelen Farkas Gimnázium, Bp. XXII.)* 103 p; **6.** Fejérvári Kamilla *(Péterfy Sándor Evangélikus Gimn., ÁI. és Óv., Győr),* Németh Júlia Mandula *(ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk. és Gimn., Bp. XIV.)* 102 p; **8.** Patócs Péter *(Kempelen Farkas Gimn., Bp. XXII.)* 101 p; **9.** Sógor-Jász Soma *(Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged)* 99 p; **10.** Szemán Gergő *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 98 p; **11.** Balog-Lunczer Mira *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Kocsner Bendegúz *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 96 p; **13.** Faddi Csongor *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 95 p; **14.** Berta András *(Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét),* Chen Kewei *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Harangozó Gergő *(Eötvös József Gimnázium, Bp. V.)* 94 p; **17.** Komlósdi Eszter *(Baksay Sándor Ref. Gimn. és Ált. Isk., Kunszentmiklós),* Mezei Marcell *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen)* 93 p; **19.** Holderith Anna *(Jókai Mór Általános Iskola, Bp. XVI.),* Kanyó Réka *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.),* Máté Kristóf *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 92 p; **22.** Barta Balázs *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 91 p; **23.** Varga Tirza *(SZTE Juhász Gyula Gyakorló Ált. Iskola, Szeged)* 89 p; **24.** Schmidt Botond *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 88 p; **25.** Andruskó Liza *(Árpád Gimnázium, Budapest III.),* Jákói Péter *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.)* 85 p; **27.** Gonda Botond *(Baár-Madas Református Gimn. és Ált. Isk., Bp. II.),* Sztupkay Nóra *(Veres Pálné Gimnázium, Bp. V.)* 84 p; **29.** Bánhegyi Botond *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.),* Bodor Benedek *(Kecskeméti Református Általános Iskola, Kecskemét)* 83 p; **31.** Fring Péter *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Támcsu Vince *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 82 p; **33.** Horváth Lili Jázmin *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Zita Vivien *(Petőfi Sándor Katolikus Általános Iskola, Kecskemét)* 80 p; **35.** Agócs Kristóf *(Szent István Gimn., Bp. XIV.),* Fehér Ádám *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Katkó Zsombor *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen)* , Richly Katinka Dóra *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Gyalog Balázs *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 78 p; **39.** Kukla Dalma Kíra *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)*, Lay Kristóf *(Árpád Gimnázium, Budapest III.),* Princz-Jakovics Ádám *(Katona József Gimnázium, Kecskemét)* 78 p; **43.** Bozsó Benedek *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 75 p; **44.** Galambos Lőrinc *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 74 p; **45.** Kolthay-Kauzler Norbert *(Eötvös József Gimn., Bp. V.)* 73 p; **46.** Palik Csenge *(Johannes-Gutenberg-Gymnasium, Waldkirchen)* 72 p; **47.** Vámos Péter *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.),* Véber Dominik *(Zrínyi Miklós Gimn., Zalaegerszeg)* 70 p; **49.** Hajdú Vince *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Zempléni Levente *(ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk. és Gimn., Budapest XIV.)* 69 p; **51.** Berta Buda *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Borbély Dániel *(Zrínyi Miklós*

Gimnázium, Zalaegerszeg), Káldy Zsófia *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 68 p; **54.** Tajti Gergő *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 66 p; **55.** Csurilla Dániel *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Korbai Csaba *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 65 p; **57.** Bob György *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.)* 63 p; **58.** Balasi Tamás *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Wendl Júlia *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)* 62 p; **60.** Gácsi Gergely *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)*, Kis Pál Csanád *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 60 p; **62.** Kang Yaxin *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Ladányi Nóra *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Mindler Júlia Dorka *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.)* 59 p; **65.** Balla Botond *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 58 p; **66.** Huang Han *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 57 p; **67.** Darvas Barna *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)*, Drofti Balázs *(Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen)* 56 p; **69.** Bodrogi Blanka *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Édes Dániel Domonkos *(Árpád Gimnázium, Budapest III.)* 54 p; **71.** Dervalics Anna *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 53 p; **72.** Krikler András *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.),* Piros Panni *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 52 p; **74.** Szalay Balázs Imre *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 50 p; **75.** Hegyi Fruzsina *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Sziráki Dávid *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 49 p; **77.** Czirják Fruzsina *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.),* Pavlics Örs *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.),* Sivák Adrián *(Nagy László Ált. Isk. és Gimn., Bp. XX.)* 48 p; **80.** Lin Keyi *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.),* Tamás Gergő *(Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét)* 47 p; **82.** Balla Bence Dániel *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Horváth Kende *(Árpád Gimnázium, Bp. III.)*, Laczkovics Annamária *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Rozsnyai Gergő *(Veres Pálné Gimnázium, Bp. V.)* 46 p; **86.** Józsa Dominik Dávid *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.),* Pocsay Bence Máté *(Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc)* 45 p; **88.** Varga Boldizsár *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.)* 44 p; **89.** Erdei Levente *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Grossmann Ádám *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Knausz Noémi *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Nagy Dániel Bence *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Osztényi Áron *(Kecskeméti Református Általános Iskola, Kecskemét)* 43 p; **94.** Mikos Péter Ferenc *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg),* Muszka Gábor *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.),* Szalai Gábor *(Kodály Zoltán Ének-Zenei ÁI. és Gimn., Kecskemét),* Szanati Máté *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 42 p; **98.** Kádár Luca Linda *(Veres Péter Gimnázium, Bp. III.),* Pálfi-Kovács Márk *(Árpád Gimnázium, Bp. III.),* Varró László *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Bp. XIII.)* 41 p; **101.** Benkó Boglárka *(Dugonics András Piarista Gimnázium, Szeged)* 40 p; **102.** Császár Domonkos *(Szent István Gimnázium, Bp. XIV.)* 39 p; **103.** Koren Dániel Maximilián *(Baár-Madas Református Gimn. és Ált. Isk., Bp. II.),* Nagy Gergő *(Veres Péter Gimnázium, Budapest III.),* Németh Nóra *(Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg)* 34 p; **106.** Pataki Virág *(Szent István Gimnázium, Budapest XIV.)* 33 p; **107.** Weisz Mahalo Áron *(Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest XIII.)* 32 p; **108.** Borbás Júlia *(ELTE Radnóti Miklós Gyak. Isk. és Gimn., Budapest XIV.)* 31 p; **109.** Nagy Bianka *(Szent István Gimnázium, Budapest XIV.)* 30 p.

(Kevesebb pontja van 18 tanulónak.)



S Z Á M R E J T V É N Y E K

rovatvezető: Csordásné Pásti Natália

Az előző hónapban kitűzött feladat megfejtése az 1. ábrán látható.

Az következő számrejtvénynek (2. ábra) az alapja egy 5×8-as téglalap, mely csoportokra van osztva vastag határvonalakkal. Ha egy csoport *n* darab négyzetből áll, akkor annak a csoportnak a négyzeteiben 1-től *n*-ig szerepelnek a számok, mindegyik pontosan egyszer (például, ha egy csoport 5 négyzetből áll, akkor az 1; 2; 3; 4 és 5 számokat írjuk be a csoport négyzeteibe). Két szomszédos négyzetben nem szerepelhet ugyanaz a szám (két négyzet szomszédos, ha van közös csúcsuk).

4– 7	3+ 2	1	2÷ 3	6	100x 4	5
3	112x 4	7	6– 1	6+ 2	5	48x 6
11+ 5	6	4	7	1	3	2
2÷ 2	3÷ 3	6 6	17+ 5	7	2÷ 1	4
4	1	3– 3	6	5	2	21x 7
7+ 6	5 5	70x 2	2÷ 4	4– 3	3 7	1
1	7	5	2	2– 4	6	3

1. ábra

A feladvány ábrája letölthető az internetről is, a *www.mategye.hu* honlapról. A beküldött megoldáson tüntesd fel a neved, az osztályod és a nevezéskor használt négyjegyű sorszámot! Csak az ezekkel az adatokkal ellátott megfejtések és az interneten a számrejtvénybe benevezett tanulók vesznek részt a versenyben.

			3	
				4
				1
2		3		
3				

2. ábra

Jó szórakozást a megoldáshoz! ☺

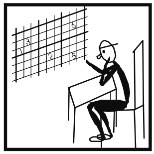
Kérlek Titeket, hogy ne küldjetek válaszborítékot, mert a helyes válaszokat mindig közöljük a következő számban.

A feladvány beküldési címe:
MATEGYE Alapítvány 6001 Kecskemét, Pf. 585

Beküldési határidő:
2024. február 13.

S U D O K U

rovatvezetők: Csordásné Pásti Natália és Csordás Péter



A mellékelt ábra tartalmazza az előző havi sudoku helyes megoldását (lásd 1. ábra).

Az előző hónapokban feladott sudoku feladványokra nagyon sokan küldtek be megoldást. Ezek javítása folyamatosan történik.

Az új feladvány a 2. ábrán látható. Ezt kell a szabályoknak megfelelően kitölteni és beküldeni.

A feladvány letölthető az internetről is, a *www.mategye.hu* honlapról. A letöltés a nevezéshez használt sorszám és jelszó beírása után lehetséges. Az így letöltött, majd kinyomtatott feladványt kell kitöltés után elküldeni.

A megoldást az újságban is elkészítheted, ebben az esetben másold át egy négyzethálós lapra, esetleg fénymásold ki az újságból, és küldd el címünkre! A beküldött megoldáson tüntesd fel a neved, az osztályod és a nevezéskor használt sorszámot! Csak az ezekkel az adatokkal ellátott megfejtések vesznek részt a versenyben. A megoldásodat az ugyanerre a címre küldött másik rovat megoldásával is beküldheted, például a Számrejtvénnyel.

9	**7**	8	2	1	6	**5**	4	3
5	**6**	**1**	9	3	**4**	2	7	8
2	**4**	3	5	7	8	1	6	9
1	**2**	**7**	4	**9**	3	6	**8**	5
6	3	9	8	5	**1**	4	2	7
8	5	4	7	6	2	**3**	**9**	1
4	1	2	3	**8**	9	7	5	6
3	8	5	**6**	4	7	**9**	1	**2**
7	9	6	**1**	2	5	**8**	**3**	4

1. ábra

6	**4**				**2**	**1**	**8**	
				1				**9**
		8						**5**
						9		
3					**5**			
		6		**3**		**4**	**1**	
	2		**7**					
								8
		4		**5**		**3**	**6**	

2. ábra

Beküldési cím:

MATEGYE Alapítvány 6001 Kecskemét, Pf. 585

Beküldési határidő: 2024. február 13.

Jó szórakozást a feladványhoz!

L O G I - S A R O K

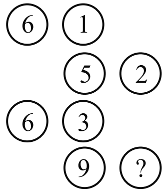
rovatvezető: Tuzson Zoltán

A kitűzött feladványok

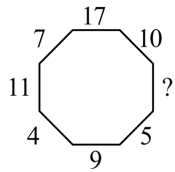
L. 628. Mit írjunk a kérdőjel helyére?

16	06	68	88	?	98

L. 629. Mit írjunk a kérdőjel helyére?



L. 630. Mit írjunk a kérdőjel helyére?



Jó szórakozást és hasznos időtöltést kívánunk!

* * * * *

F I G Y E L E M !

A Logi-sarok feladatai nem szerepelnek a pontversenyben, ezért kérjük, hogy ne küldjétek be a feladatok megoldásait! A megoldások nem kerülnek értékelésre.

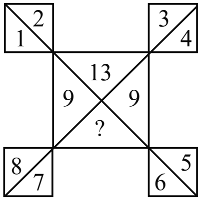
A korábban kitűzött feladványok megfejtése

L. 625. Mit írjunk a kérdőjel helyére?

I, V, VII, VIII, X, ?

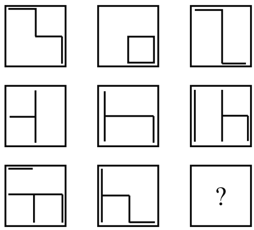
Megfejtés: Figyeljük meg, hogy a felsorolt római számok kiolvasása minden esetben egyetlen szótagból áll. Ezért a „húsz” következik, vagyis a XX.

L. 626. Mit írjunk a kérdőjel helyére?



Megfejtés: Megfigyelhető, hogy a két átló által alkotott mindnégy részébe eső 3-3 háromszögben levő számok összege 18. (Például: $2+13+3=18$). Ezért $7+$ $+?+6=18$, így a kérdőjel helyére 5 talál.

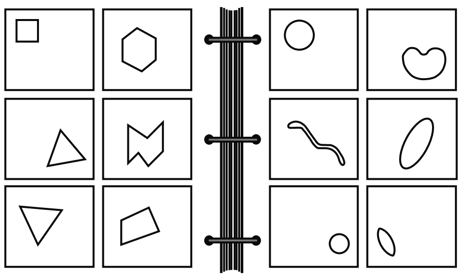
L. 627. Mit írjunk a kérdőjel helyére?



Megfejtés: Figyeljük meg, hogy ha soronként az első oszlop négyzeteit a második oszlop négyzeteire csúsztatjuk, majd kitöröljük azokat a vonalakat amelyek duplán szerepelnek, akkor rendre a harmadik oszlop négyzeteit kapjuk.

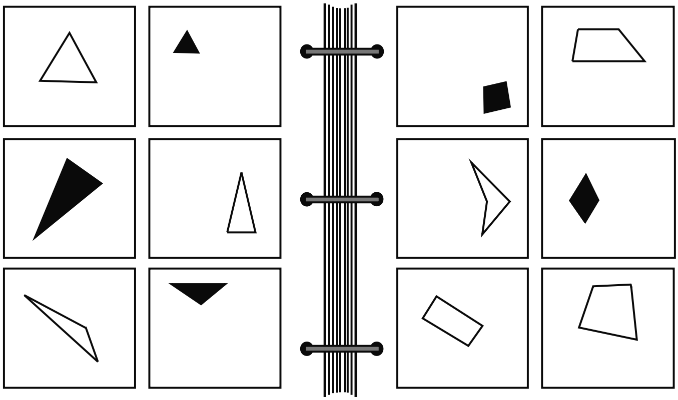
Bongard problémák

BP. 4. Miben különböznek az első csoport ábrái a második csoport ábráitól?



Megfejtés: Figyeljük meg a bal, illetve a jobb oldalon elhelyezkedő alakzatokat. Miután észrevesszük, hogy vannak szögletes alakzatok és vannak görbe vonalú alakzatok, szembetűnő, hogy a bal oldali alakzatok szögletes vonalúak, a jobb oldaliak görbe vonalúak. Ez tehát a lényeges különbség!

BP. 5. Miben különböznek az első csoport ábrái a második csoport ábráitól?



Kellemes és hasznos időtöltést és jó szórakozást kívánok minden Olvasónak!

* * * * *

Milyenek voltak a mai órák ősei?

Az egyiptomiak által kb. 4000 évvel ezelőtt készített napórák már arra is alkalmasak voltak, hogy ne csak az időpontokat, hanem időtartamokat is meghatározhattak velük. Az ún. kereszt rudas napórák két részből álltak: az időrúdból és a rá árnyékot vető keresztrúdból. Az időrúdon lévő beosztásokról lehetett leolvasni az eltelt időt. Ahhoz azonban, hogy az ilyen óra működjön, a helyzetét napközben meg kellett változtatni. Reggel keleti irányba, délután nyugati irányba fordították a Nap felé. Időszámításunk kezdete előtt kb. 1400-ban készítették el Egyiptomban az első vízórákat. A vízórák legegyszerűbb fajtája egy olyan kőből készült, amelynek csöbörszerű alakja volt, belsejét pedig vésett beosztásokkal látták el. Miközben az edény alján lévő kis nyíláson kicsepegett a víz, csökkent a vízoszlop magassága, egyre több beosztás volt látható, jelezve az idő múlását. Később igen ötletes módon pontosították a vízórákat azáltal, hogy több edényt helyeztek egymás alá. A felsőedény túlfolyónyílása biztosította, hogy a víz egyenletesen folyjon az alsó edénybe, ahol a skáláról leolvasható volt az eltelt időtartam. A fogaskerék feltalálásával mutatóval ellátott vízórákat is alkalmaztak. Ezek igen egyenletesen jártak, s általuk vették észre, hogy a napórák járása nem egyenletes. Érdekes módon reggel siet, délután lelassul, de estére behozza a késést. Felismerték, hogy a napóra csak akkor jár egyenletesen, ha a gnomon párhuzamos a Föld tengelyével.

Bonifert Domonkosné – Schwartz Katalin: Lyukasóra fizikából

M A T E M A T I K A I   P R O B L É M Á K

rovatvezető: Csete Lajos

A kitűzött problémák

MP. 414. A nappaliban, a hálószobában és a konyhában egy-egy hőmérő van. A hálószobában mindig egy fokkal magasabb a hőmérséklet, mint a nappaliban, a konyhában pedig egy fokkal magasabb, mint a hálószobában. Peti felírta mindhárom hőmérő reggeli, délutáni és esti leolvasási adatait. Ámde pontosan az egyik számot elírta, vagyis hibásan írta le. A leírt eredményei a következők voltak valamilyen sorrendben: 17; 18; 19; 22; 25; 25; 26; 27; 27. (A fokokat Celsius-fokokban értjük.) Melyik számot írta el és mi lenne helyette a helyes szám?

MP. 415. Egy 3×3-as táblázat minden mezőjében van egy szám. Minden sorban a számok szorzata 1, és minden oszlopban a számok szorzata szintén 1. Másrészt minden 2×2-es négyzetének a mezőiben levő számok szorzata 2. Mivel egyenlő a középső mezőben levő szám, ha létezik a táblázat megfelelő kitöltése?

Jó munkát kívánok!

A megoldások beküldési határideje:
2024. február 13.

Beküldési cím:
Csete Lajos 9023 Győr, Corvin u. 29. III/3.

Korábban kitűzött feladatok megoldásai

MP. 410. Ancsi és Bogi egyaránt 16 éves, Cili 15 éves, Dóri 14 éves, Encsi pedig 13 éves. A leányok egy csónakkal akarnak átkelni egy folyón. A csónakban legfeljebb 3 leánynak van férőhely. Egyetlenegy leány sem lehet egyedül a csónakban. A leányok különös szabálya szerint két olyan leány nem lehet egyszerre a csónakban, akiknek a kora között több mint 1 év különbség van.

Át tudnak-e kelni a leányok a folyón ilyen szabályokkal?

1. megoldási változat:

	Átkelés	Létszám	Életkori különbség	Odaát marad
odaút	A, B, C	3 fő (16,16,15)	1	A
visszaút	–, B, C	2 fő (16,15)	1	A
odaút	C, D, –	2 fő (15,14)	1	D
visszaút	C, – , A	2 fő (15,16)	1	D
odaút	A, B, C	3 fő (16,16,15)	1	A, B
visszaút	–, C, D	2 fő (14,15)	1	A, B
odaút	D, E, –	2 fő (14,13)	1	D, E
visszaút	A, B, –	2 fő (16,16)	1	D, E
odaút	A, B, C	3 fő (16,15,15)	1	A, B, C, D, E

Sőtér Jázmin Sára 7. osztályos tanuló (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium) megoldása.

2. megoldási változat:

Várakozók	Odautazók	Visszautazók	Ottmaradók
ABC**DE**	ABC	AC	B
ACD**E**	CD	BC	D
ABC**E**	ABC	CD	AB
CDE	DE	AB	DE
ABC	ABC	–	ABCDE

Sőtér Hunor Marcell 7. osztályos tanuló (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium) megoldása.

3. megoldási változat:

1. lépés: Ancsi (16), Bogi (16), Cili (15) átkel: A, B, C.
2. lépés: Ancsi (16), Bogi (16) visszamegy, marad C.
3. lépés: Dóri (14), Encsi (13) átkel: C, D, E.
4. lépés: Dóri (14), Cili (15) visszamegy, marad E.
5. lépés: Ancsi (16), Bogi (16), Cili (15) átkel: A, B, C, E.
6. lépés: Bogi (16), Cili (15) visszamegy, marad: A, E.
7. lépés: Cili (15), Dóri (14) átkel: A, C, D, E.
8. lépés: Ancsi (16), Cili (15) visszamegy, marad: D, E.
9. lépés: Ancsi (16), Bogi (16), Cili (15) átkel: A, B, C, D, E.

Tehát a lányok át tudnak kelni a folyón a megadott szabályokkal.

Bozóki Zénó 7. osztályos tanuló (Budapest, XIV. Zuglói Hajós Alfréd Ált. Isk.) megoldása.

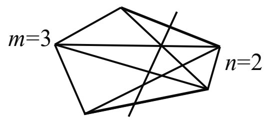
Megoldotta még hasonlóan: Dervalics Anna 8. osztályos tanuló (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimnázium), Dömők Dávid 6. osztályos tanuló (Budapest, Kőbányai Keresztury Dezső Általános Iskola), Holderith Anna 8. osztályos tanuló (Budapest XVI. Kerületi Jókai Mór Általános Iskola), Kádár Luca 8. osztályos tanuló (Budapest III., Veres Péter Gimnázium).

Megjegyzés: A problémát a következő helyről vettük. Liu, Andy – Peter Taylor: *Mathematical Recreations from the Tournament of the Town*, CRC Press, Boca Raton-London-New York, 2023. A C3-4 probléma a 45. oldalon, illetve a megoldás a 61. oldalon.

A problémát kissé módosítva tűztük ki, nemcsak a leánynevek mások, hanem az eredeti problémában az utazó leányok közötti korkülönbség legfeljebb 2 év volt.

MP. 411. Egy konvex 2023-szögben az összes átlót behúzták. Egy egyenes úgy metszi a konvex 2023-szöget, hogy nem megy át egyetlenegy csúcsán sem. Ez az egyenes páros vagy páratlan számú átlót metsz?

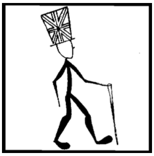
Megoldás: Legyen a konvex 2023-szög m darab csúcsa a metsző egyenes egyik oldalán és n darab csúcsa a másik oldalán. Tekintsük a metsző egyenes azon oldalát, amelyen az m darab csúcspont van! Egy tetszőleges ilyen csúcspontból n darab szakasz indul a metsző egyenes másik oldalán levő n darab csúcspontba. Tehát az m darab csúcspontból mn darab szakasz indul ki az n darab csúcspontba. Vagyis a metsző egyenest mn olyan szakasz metszi, amelyek átellenes oldalon levő két-két pontot kötnek össze. Ezek közül két szakasz a 2023-szög egy-egy oldala, míg a maradék $mn-2$ darab szakasz a sokszög átlója. Vegyük figyelembe, hogy $m+n=2023$, ezért az m és az n közül egyik páratlan, míg a másik páros szám. Ebből következik, hogy mn páros szám. Ebből viszont az következik, hogy az $mn-2$ darab átló is páros számú. Tehát a problémabeli egyenes páros számú átlót metsz.



1. megjegyzés: Vegyük észre, hogy a bizonyításból következik a probléma általánosítása: *Egy konvex* $(2k+1)$*-szögben az összes átlót behúzták.* (*Ahol a k pozitív egész szám.*) *Egy egyenes úgy metszi a konvex* $(2k+1)$*-szöget, hogy nem megy át egyetlenegy csúcsán sem. Ekkor ez a metsző egyenes páros számú átlót metsz.* Másrészt érdemes lehet illusztráló ábrát készíteni, hogy jobban megértsük a megoldást. Legyen $m=3$ és $n=2$, azaz egy konvex 5-szögre vizsgáljuk a megoldásban megfogalmazott észrevételt (lásd ábra). Vegyük észre, hogy itt a két vastagabban rajzolt szakasz a sokszög oldala és ezt a 2 darab szakaszt vonjuk le az mn darab szakaszból, hogy megkapjuk az $mn-2$ darab olyan szakaszt, amely átlója a konvex sokszögnek. (Csak azokat az átlókat vizsgáljuk, amelyek metszik az egyenest.)

2. megjegyzés: *Bozóki Zénó 7. osztályos tanuló (Bp. XIV., Zuglói Hajós Alfréd Ált. Isk.)* és *Lénárt Kinga 6. osztályos tanuló (Gödöllő, Premontrei Szent Norbert Gimn.)* megsejtette, hogy páros számú átlót fog metszeni a problémában szereplő egyenes. A sejtést kis csúcsszámú konvex sokszögek vizsgálatánál gondolták ki. Ez a gondolat sokszor hasznos lehet a matematikában, miszerint a nagyobb méretű probléma helyett hasonló, de kisebb méretűt vizsgálunk és abból igyekszünk kitalálni, hogy mi lehet a nagyobb méretű probléma megoldása. *Dervalics Anna 8. osztályos tanuló (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimn.)* is megsejtette, hogy páros számú átlót fog metszeni a problémában szereplő egyenes.

3. megjegyzés: A problémát a következő helyről vettük. Liu, Andy–Peter Taylor: *Mathematical Recreations from the Tournament of the Town*, CRC Press, Boca Raton-London-New York, 2023. 100. oldal és a megoldása a 115. oldalon. Itt konvex 2009-szögre tűzik ki a problémát.



M A T H S

rovatvezető: Pilter Adorján

Last month we were dealing with limericks. Molnár Gábor Dávid sent us another fun one:

$$((4+12+1000)-(2^{10}))\cdot 2:8\cdot -1 = (1:10)\cdot 20$$

And the interpretation?

A quartett, a dozen, a grand
Minus two on the power of ten.
Times a brace,
Divide by eight.
Flip the sign.
And you get a tenth
Of a score.

Key: Quartett = 4
Dozen = 12
Grand = 1000
Score = 20

As the holidays are over, you must be familiar with the feeling when several people surround a plate or a tray of food and there is only one last piece remaining. Either nobody dares to take it, because it is the last one, or people "fight" for it. This month we will examine the latter situation. This article was inspired by the Ted-Ed video: The last banana – A thought experiment in probability. (https://www.youtube.com/watch?v=Kgudt4PXs28&).

I would like you to stop reading this paragraph and watch the first 35 seconds of the above-mentioned Ted-Ed video to be familiar with the situation.
Now, stop the video and answer the question:
1) So, who do you want to be?

2) Also, why?

After you've answered these questions, I would like you to take 2 dice of different colour and start rolling them. Please roll them 50 times and record who wins the banana.

You can organize your work into tables, like the ones below:

Roll	Player 1	Player 2	Winner
1	1	2	Player 1
2	5	4	Player 2
3	4	3	Player 1
…			

and so on.
Then, you can find your total:

Number of wins	
Player 1 wins	Player 2 wins
21	29

Altogether there were 50 rolls, so we can even calculate the percentage of wins by the players. In order to do so, we divide the number of wins by a given player by the total number of rolls then multiply it by 100%. We can add this to our table:

Number of wins		Percentage (%) of wins	
Player 1 wins	Player 2 wins	Player 1 wins	Player 2 wins
21	29	$\frac{21}{50}\cdot 100\% = 42\%$	$\frac{29}{50}\cdot 100\% = 58\%$

3) What does your table suggest?
4) Who do you want to be now in this Last banana game?
5) Is this what you expected?

I've already asked you several times to send me your work. This time it would be even more helpful if you could email your answer to the five questions asked together with your table of 50 rolls organized into how many times player 1 and 2 wins and what percentage of the time player 1 and 2 wins.

Your answers and table can be sent to:

abacus@mategye.t-online.hu
Please write "MATHS" into the subject field.

Another special thanks and congratulations to Kostrigina Mariia and Anna for their neat and detailed work and solution to the September and October questions. Keep up the good work!

MATHEMATIK

rovatvezető: Nagy Barbara

Die meisten Menschen in Ungarn leben ihr Leben nach dem bei uns verbreiteten gregorianischen Kalender, der der weltweit meistverbreitete Kalender ist. Er ist ein Sonnenkalender (Solarkalender), das bedeutet, die Basis der Zeiteinteilung ist der Lauf der Erde um die Sonne, der Mond hat keinen Einfluss auf die Länge eines Jahres. Ein Sonnenjahr besteht aus ca. 365,242 Tagen, deswegen ist ein Jahr in den meisten Kulturen 365 Tage lang, und jedes vierte Jahr ist ein sog. Schaltjahr, das einen Extratag hat, Schaltjahre sind also 366 Tage lang.

In vielen Kulturen benutzen die Menschen aber einen anderen Kalender, z. B. auch die orthodoxen Kirchen verwenden den julianischen Kalender, der seit dem März 1900 (und noch bis zum 28. Februar 2100) eine Differenz von 13 Tagen zum gregorianischen Kalender hat. Das bedeutet, alle Tage sind verschoben, und wenn wir schon den 7. Januar haben, gibt es im julianischen Kalender erst den 25. Dezember, daher feiern orthodoxe Menschen Weihnachten fast zwei Wochen später, als die meisten Menschen in Ungarn.

Ein ganz anderer Typ von Kalendern ist der islamische Kalender. Er ist ein reiner Mondkalender (Lunarkalender), er orientiert sich also nur am Lauf des Mondes. Seine Kalenderjahre bestehen aus 12 Mondmonaten, sie sind 29 oder 30 Tage lang, und ein Jahr besteht aus 354 Tagen, in Schaltjahren aus 355 Tagen (aber beim islamischen Kalender sind die Schaltjahre nicht dieselben Jahre, wie bei uns).

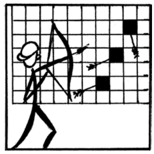
Interessant: Das islamische Jahr ist um ca. 11 Tage kürzer als das Jahr im gregorianischen Kalender. Daher fallen in etwa allen 33 Jahren zwei islamische Neujahrstermine in ein gregorianisches Kalenderjahr.

Frage: Nach wie vielen Jahren fällt das Neujahr im gregorianischen und im islamischen Kalender wieder auf demselben Tag, wenn wir die Schaltjahre nicht betrachten?

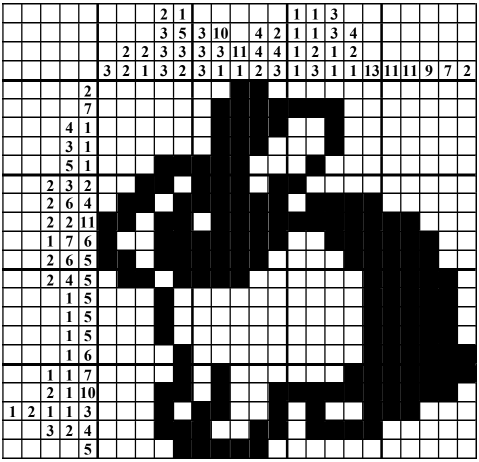
Lösung: Der gregorianische Kalender besteht aus 365 Tagen, der islamische Kalender aus 354 Tagen, wenn wir von den Schaltjahren herabsehen. Wir suchen das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Zahlen. $365 = 5 \cdot 73$ und $354 = 2 \cdot 3 \cdot 59$. Sie haben keine gemeinsamen Primfaktoren, das bedeutet, dass das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen ihr Produkt ist. Das Neujahr fällt nach 129210 Jahren wieder auf demselben Tag in den beiden Kalendern.

L O G I G R A F I K A

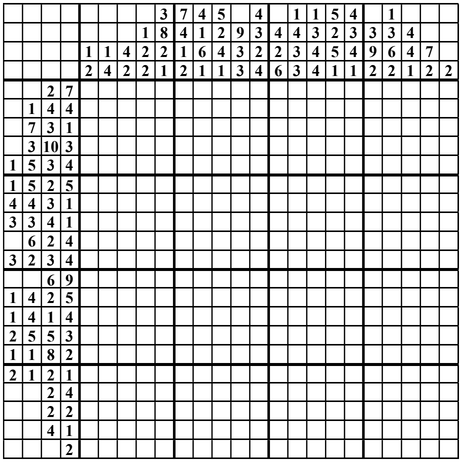
rovatvezető: Pusztai Ágota



Először is Nagyon Boldog Új Évet Kívánok Mindenkinek!
Kezdjük is rögtön azzal, hogy megnézzük az előző havi feladvány megoldását! A jól színezett képen egy nyuszi látható (1. ábra). A 2. ábrán az új rejtvényt látjátok, amelynek megoldását a korábbiakban megadott módon várjuk a szerkesztőség címére.
Szeretném sokadszorra is felhívni a figyelmeteket arra, hogy aki nem az eredeti megoldását küldi be, hanem egy tisztázott, átmásolt változatot, az fokozott figyelmet fordítson arra, hogy minden kis négyzet megfelelően legyen színezve! Már egy négyzet tévesztése is pontvesztéssel jár, még akkor is, ha ez egyértelműen csak figyelmetlenségből történt! Sajnos minden alkalommal találkozom ilyen hibával! Kár ezekért a pontokért! A helyesen színezett ábra fel nem ismerése vagy félreismerése viszont nem jelent pontlevonást.
A logigrafika ábrája letölthető a *www.mategye.hu* honlapról. Ez a nevezéshez használt sorszámmal és jelszóval lehetséges. A megoldásra írd rá neved, osztályod és a nevezéskor használt négyjegyű sorszámodat. Az elkészített megoldást zárt borítékban küldd el az alábbi címre:



1. ábra

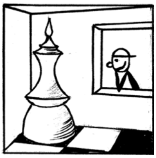


2. ábra

ABACUS Logigrafika 1437 Budapest, Pf. 774

Beküldési határidő: 2024. február 13.

Jó szórakozást a feladványhoz!



S A K K - S A R O K

rovatvezető: Karácsonyi Kata

Érdekességek

Érdekességként most egy fejtörőt hoztam Nektek a *Sherlock Holmes sakkrejtélyei* című könyvből. Szerintem nagyon izgalmas történetbe szőtt problémák találhatók benne, amiket utána logikusan levezetve elmagyaráz Sherlock Watsonnak. A rész második felét (és a megoldását) majd a következő rovatban találjátok. Jó fejtörést!

Merre mennek a bábok?

(…)

A klub szinte üres volt, néptelen – leszámítva két urat. Egyiküket jól ismertük, Marston ezredes volt az.

– Nézzünk oda, Holmes! – kiáltotta Marston, s már fel is pattant a sakktábla mellől. – Épp most fejeztünk be egy bizarr, valóban nem mindennapi játszmát.

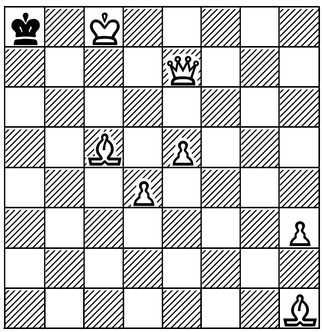
– Látom – szögezte le Holmes, és máris az állás tüzetesebb tanulmányozásába mélyedt. – A csudába is, Marston – mondta Holmes –, hát hogy van az, hogy valahányszor magát sakktáblánál látom, mindig a világos bábokat vezeti? Marston ezen először jót nevetett, de aztán máris megnyúlt az arca.

– Hallja-e, Holmes – mondta csakugyan leesett állal - ezt meg hogy találta ki? Holmes szemében mókás fény gyúlt.

Kacsintva mondta aztán:

– Uraim, őszinte meggyőződésem, hogy önök is élvezetesebbnek tartják majd, ha eltöprengenek kicsit ezen a rejtélyen. Marston és Sir Reginald a következő pillanatban máris buzgón hajolt a tábla fölé, fojtott hangon tanakodva különféle lehetőségeken. Mi pedig hamarosan távoztunk.

Észak



Dél

(…)

– Rakjuk csak föl azt az állást újra, Watson - mondta, Holmes s neki is látott nyomban. – Hát nem tud rájönni, ki vezette a világos és ki a sötét bábokat?

Hosszan, alaposan tanulmányoztam az állást, de nekem ilyen szempontból semmit se mondott.

Bármelyik oldal lehetett világos, „Dél" ugyanúgy, mint „Észak".

– Nincs semmi a maga számára, Watson – folytatta Holmes – nincs ebben az állásban semmi magának, ami különösebben megragadná a figyelmét?
Néztem megint az állást. Jól van, Holmes, az, gondolom, bárkinek feltűnne, hogy a sötét király sakkban áll... igen, sakkot kapott, a sakkot a világos futó adta. Csak hogy lehet ebből arra következtetni, ki volt a világos, melyik fél...? Holmes diadalmasan elmosolyodott.

– Watson, itt jön be a visszaelemző módszer... egy kicsit elmerülünk a múltban. Ha egyszer sötét királya sakkban áll, mi lehetett világos utolsó lépése? Megint a táblára néztem, úgy feleltem: - A világos gyalog épp most lépett e4-ről e5-re, – felfedett sakkot adott a futóval. Ebből, persze, arra kell következtetnünk, hogy „Dél" volt a világos. Másrészt viszont lehetett a világos „Észak" is, csak akkor az utolsó lépése más volt. A most d4-en álló gyalog d5-ről érkezett oda. Fogalmam sincs, hogy a két lehetőség közül melyiket kellene választanom.

– Nagyon jó, Watson, de ha valóban így lenne ez, ahogy maga mondja, vagyis hogy világos utolsó lépése a két gyalog valamelyikével történt, mi lehetett sötét utolsó lépése e két gyaloglépés valamelyike előtt? Néztem a táblát megint, s így válaszoltam:

– Sötét nyilvánvalóan a királyával lépett. És a8-ra, csakis a7-ről érkezhetett.

– Képtelenség! – kiáltotta Holmes. – Ha a király a7-en állt volna, egyszerre kétféle sakkot kapott volna: a vezértől és a c5 futótól.

– Igaz, Holmes, igaz. Tehát – kiáltottam diadalmasan -az állás maga képtelen.

– Dehogy az nevetett Holmes. – Maga egyszerűen nem vett figyelembe minden lehetőséget, Watson.

A decemberi feladványok megfejtései

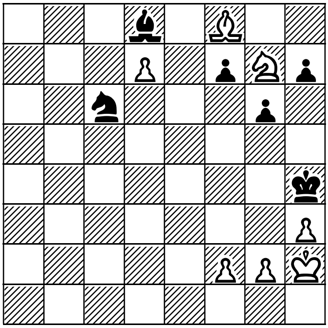
Az első feladvány: 1.Vxf8+! Kxf8 2.Fh6+ Kg8 3.Be8#

A második feladvány: 1.c7 Bd6+ 2.Kb5 Bd5+ 3.Kb4 Bd4+ 4.Kb3 [4.Kc3 Bd1 5.Kc2 is jó] 4...Bd3+ 5.Kc2 Bd4 6.c8=B! Ba4 7.Kb3 Bd4 8.Bc1#

A harmadik feladvány: 1.Fc1!! e6 2.Bd2! Kf4 3.Bd4#

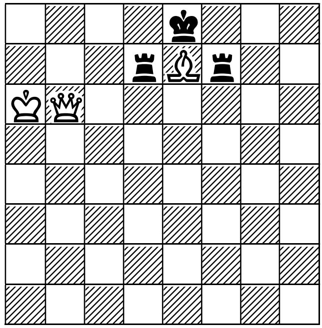
A negyedik feladvány: 1.Fd8+! Ka7 2.Bxa6+!! bxa6 [2...Kb8 3.Vf4+ Ve5 4.Vxe5+ Bd6 5.Vxd6+ Kc8 6.Vc7#; 2...Kxa6 3.Va5#] 3.Vd7+ Kb8 4.Vc7+ Ka8 5.Vc8+ Ka7 6.Fb6+ Kxb6 7.Vb8#

Feladványok



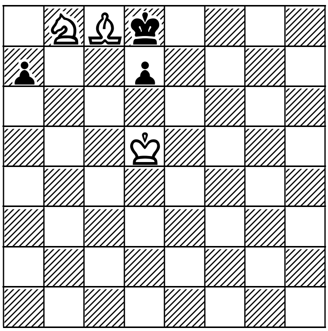
*

1. feladvány: Egy szép példa a tábla szélén ragadt király gyengeségének kihasználására. Világos lép!



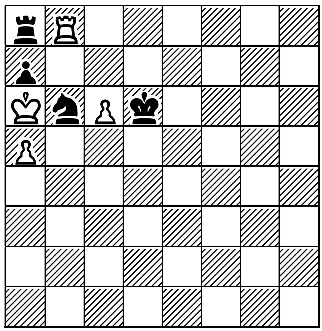
***

2. feladvány: A fehér futónk bajban van, de hátha valamilyen mattkép segítségével meg tudnánk nyerni ezt az állást. Világos indul és nyer!



****

3. feladvány: Úgy tűnik, esélytelen mindkét könnyűtisztünket megmenteni, és csupán egy könnyűtiszttel lehetetlen mattot adni… Vagy mégsem?



*****

4. feladvány: Ez egy elég nehéz, de egy gyönyörű lépéskényszerrel befejeződő feladat. Világos lép!

A megoldások beküldési határideje: 2024. február 13.

Beküldési cím: ABACUS Sakk 1437 Budapest, Pf. 774

Kérjük, a borítékra írjátok rá „Sakk-sarok“!

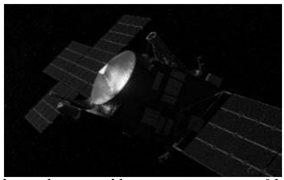
F I Z I K A R O V A T

rovatvezető: Szatmáry Zsolt

A kitűzött feladatok

856. (*mérési/kifejtős feladat*) Rögzítsünk egy kis lyukba szívószálat egy műanyag palack aljához közel, ha lehet vízszintesen. (Ha szükséges ragasztóval tegyünk tömítést a szívószál köré, hogy ne eresszen a lyuknál.) Tegyünk a palackra két jelet filctollal, egyet a nyakához közel, egyet a cső bevezetésétől 1-2 cm-rel magasabbra. Vizsgáljuk meg, hogyan függ a szívószál hosszától a víz kifolyási ideje. Mindig a jeltől jelig mérjünk. Végezzük el a mérést ahányszor lehet, centiméterenként egyre rövidebbre vágva ollóval szívószálat. Végezzük el a kísérletet kétféle vastagságú szívószállal. Ábrázoljuk grafikonon a kapott értékeket mindkét szívószálra! Foglaljuk össze tapasztalatainkat. Keressünk magyarázatot!

Szatmáry Zsolt



857. (*7.*) A Psyche szonda 2023. október közepén indult, hogy felfedezze az azonos nevű kisbolygót, amely a Mars és Jupiter közötti aszteroidaövben kering. A Psyche kutatószonda 16 millió kilométer távolságból küldött lézeres jelet a Földre, a NASA munkatársai pedig a San Diegó-i Palomar obszervatóriumban sikeresen vették az üzenetet. A művelet sikeresen igazolta a DSOC (deep space optical communications) nevű optikai távközlési technika űrbéli működését. A célzás pontosságát úgy jellemezték, mintha másfél kilométerről kellene lézermutatóval követni egy mozgó ötforintost. Becsüljük meg, mekkora távolságot tesz meg a Föld a világűrben a jel indítása és megérkezése között eltelt idő alatt, vagyis mennyivel kell „előrébb" célozni az űrszondáról.

Szatmáry Zsolt

858. (*7., 8.*) Mária egy 50 grammos kis súllyal kiegyensúlyozta a vonalzóját az asztal szélén. Ebben a helyzetben a vonalzó éppen nem billent le az asztal széléről. A vonalzón a skála a vonalzó szélétől 1 centiméterre kezdődik, és az asztal széle 36,8 cm-es osztásjelnél van. A kis súlyt tartó kötél pont az utolsó, az 50 cm-es osztásnál van, amely a vonalzó szélétől szintén 1 cm-re van. Ezek alapján becsüld meg a vonalzó tömegét!

Szatmáry Zsolt

859. (*8*) József családja 11,5 kg töltettömegű PB palackról működő, átfolyós vízmelegítőt használ. A házukba 15°C-os víz jön a hálózatról, és a bojler 40°C-os vizet ad megnyitáskor, 11 litert percenként. József egyik hónapban felírta, hogy mennyit használták a bojlert, és kijött, hogy egy palackról összesen 5 órát ment a bojler a szokásos módon. A bojler a műszaki adatai szerint 60%-os hatásfokkal működik, azaz a gáz elégetésekor felszabadult energia 60%-át tudja az átáramló víz melegítésére fordítani. Ezek alapján számítsuk ki, milyen tömegösszetételű a propán-bután gázelegy a palackban! A propán (C_3H_8) égéshője 50,3 MJ/kg, a bután (C_4H_{10}) égéshője 49,5 MJ/kg. A víz fajhője 4,2 kJ/(kg·°C).

Szatmáry Zsolt

860. (*8.*) Szilveszter két ismeretlen ellenállást egyszer sorosan, egyszer párhuzamosan köt ugyanarra az (elhanyagolható belső ellenállású) áramforrásra. Azt tapasztalja, hogy az egyik esetben 4-szer akkora teljesítményt ad le az áramforrás. Mit állíthatunk a két ellenállás nagyságáról? Mekkora lenne a leadott teljesítmények aránya, ha a két ellenállás közül az egyik 4-szer akkora lenne, mint a másik?

Szatmáry Zsolt

Beküldési határidő: 2024. február 13.

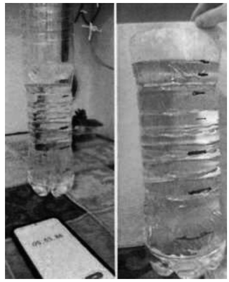
Beküldési cím: ABACUS Fizika 1437 Budapest, Pf. 774

Korábban kitűzött feladatok megoldásai

846. *(mérési/kifejtős feladat)* Készíts vízórát (kb. 60 perc méréséhez) két darab 2 literes flakon segítségével! Az egyik flakon alján fúrj megfelelően kis lyukat, a másiknak a felső részén vágd le a tetejét! Helyezd el őket úgy, hogy a felsőből – a lyukon keresztül – kifolyó víz éppen a levágott tetejű alsóba folyjon! A telefonodban található stopper segítségével mérve az időt, filctollal jelöld be a flakonon azonos időközönként a vízszintet! (Én 5 percenként jelöltem.) Készíts egy fényképet az óráról „működés" közben, illetve a flakon oldalán a jelölésekről, és küldd be a képeket is! Mit állapíthatsz meg a vonalak távolságáról? Vajon miért? Végezd el a kísérletet úgy is, hogy a felső flakonra rácsavarod a kupakot! Mit tapasztalsz? Mit gondolsz miért történt?

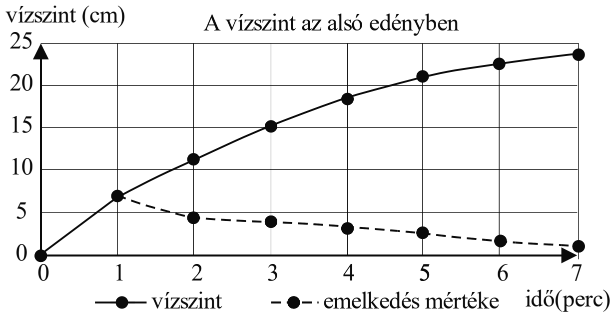
Szatmáry Zsolt

Megoldás: Nagy öröm, hogy ebben a hónapban is rengeteg nagyszerű megoldás érkezett. Ezúttal Koós Bendegúz 7. osztályos tanuló (Fasori Evangélikus Gimnázium, Budapest) által beküldöttek alapján készült megoldást közlünk.



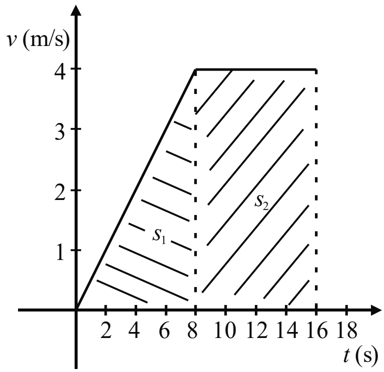
Előkészületek: 2 db 1,5 literes műanyag palackot használtam a kísérlethez. Az egyik palacknak levágtam a tetejét, míg a másiknak az aljára egy kb. 1–1,5 mm átmérőjű lyukat fúrtam felhevített végű tű segítségével.
Mérés leírása: Az első kísérletben a lyukas aljú palackot megtöltöttem vízzel, miközben befogtam a lyukat az ujjammal. Mikor rátetem a levágott tetejű palackra, elengedtem a lyukat és elindítottam a stoppert. 1 percenként húztam egy vonalat az aktuális vízszintnél. Azt tapasztaltam, hogy 1 perc alatt egyre kevesebb víz folyt ki a felső palackból. Vagyis a víz egyre lassabban folyt ki a lyukon. Bár a palack átmérője kicsit váltakozott, de egyenletesnek tekintve közelítőleg meg tudtam adni a növekvő vízszint sebességét 1 perces időközönként számolva.
Tapasztalat: Táblázatba foglaltam a mért értékeket. Az értékeket az első vonal esetében a palack aljától, továbbiakban az előző vonaltól mértem. A táblázat alapján elkészítettem a grafikont is.

	vízszint (cm)	sebesség (m/s)
1	6,8	0,068
2	4,5	0,045
3	4,0	0,04
4	3,3	0,033
5	2,5	0,025
6	1,6	0,016
7	1,1	0,011



Magyarázat: Amikor még tele volt a felső flakon, magas volt a vízoszlop, így nagy volt a hidrosztatikai nyomása, ezért gyorsabban „préselődött” át a kis lyukon a víz. Ahogy csökkent a felső palackban a vízszint, úgy csökkent a nyomása is, így a kiáramlás sebessége is. Ezek a csökkenő sebesség értékek jól láthatók a táblázatban. A második kísérletben a felső palack kupakját rácsavartam a palackra, és azt tapasztaltam, hogy 4-5 csepp után nem jött ki több víz a lyukon. Ennek oka az, hogy ahogy a víz kijött a palackból, nem tudott a helyére levegő áramlani, így részleges vákuum, azaz kisebb légnyomás jött létre a víz fölötti részben, így a külső légnyomás meg tudta tartani a vizet.

852. (*7.*) Ha Feri szánkón ülő kisöccsét húzza vízszintes talajon állandó sebességgel, akkor a szükséges húzóerő 6,4 N. A szánkó testvérével együtt 32 kg. Egy alkalommal állóhelyből indulva 8 másodperc alatt 14,4 km/h óra sebességre gyorsította fel egyenletesen a szánkót, szintén vízszintes húzóerőt kifejtve, majd ezzel a sebességgel még újabb 8 másodpercig húzta kisöccsét. Készítsd el a szánkó sebesség-idő grafikonját! Mekkora utat tett meg a szánkó a 16 másodperc alatt? Mekkora munkát végzett összesen Feri? Mekkora munka fordítódott a szánkó gyorsítására? A végzett munka hány százaléka fordítódott a talaj és a szánkó belső energiájának növelésére? *Szatmáry Zsolt*



Megoldás: Ha az állandó sebességgel történő mozgatáshoz 6,4 N kell, akkor ez éppen megegyezik a súrlódási erővel, amely a szánkóra hat. Ez mindig hat mozgatás közben, függetlenül a sebesség nagyságától, vele ellentétes irányban. Először számoljuk ki a szánkó gyorsulását! $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{4}{8}=0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Ezek után írjuk fel Newton II. törvényét: $ma=F_{h1}-F_s$. Ebből $F_{h1}=32\cdot 0{,}5+6{,}4=22{,}4$ N adódik. A második szakaszon, mivel a sebesség állandó, ezért a húzóerő 6,4 N. Készítsük el a sebesség-idő grafikont. A grafikon alatti terület a megtett úttal egyezik meg. $s_1==\frac{4\cdot 8}{2}=16$ m, illetve $s_2=4\cdot 8=32$ m. A két szakaszon a munkavégzés: $W=F_{h1}\cdot s_1+F_{h2}\cdot s_2=22{,}4\cdot 16+6{,}4\cdot 32=563{,}2$ J. Ebből a szánkó gyorsítására $(F_{h1}-F_s)\cdot s_1=m\cdot a\cdot s_1=32\cdot 0{,}5\cdot 16=256$ J fordítódott. Ezt megkaphattuk volna úgy is, hogy kiszámoljuk a szánkó mozgási energiáját a gyorsítás végén: $\frac{1}{2}\cdot 32\cdot 4^2=256$ J. Ezek szerint a kérdezett arány: $\frac{563{,}2-256}{563{,}2}=\frac{6}{11}\approx 54{,}5\%$.

853. (*7.*, *8.*) Egy autó teljes megtett útjának 80%-át autópályán, 130 km/h-val tette meg. A fennmaradó részben vagy városban haladt, 50 km/h-val, vagy országúton, 90 km/h-val. Mekkora lehetett a teljes útra vett átlagsebessége? Készíts grafikont, hogyan függ az átlagsebesség a két szakasz viszonyától! (A grafikon megrajzolásához bátran használj alkalmazást, programot!) *Szatmáry Zsolt*

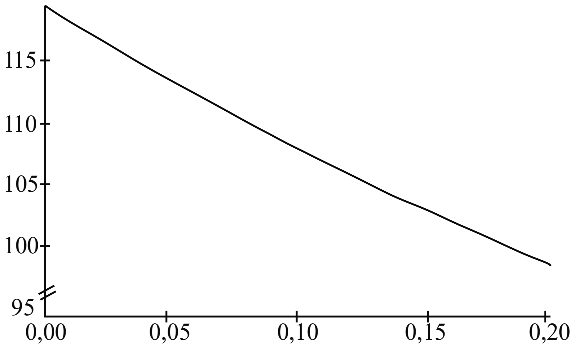
Megoldás: Nyilvánvaló, hogy akkor a legnagyobb az átlagsebessége, ha az autópályán kívüli teljes részt, az út 20%-át országúton teszi meg, és akkor a legkisebb, ha mindet városban teszi meg.

Így $v_{\text{átl max}}=\frac{s_{\text{összes}}}{t_{\text{összes}}}=\frac{s}{\frac{0{,}8\cdot s}{130}+\frac{0{,}2\cdot s}{90}}=\frac{1}{\frac{0{,}8}{130}+\frac{0{,}2}{90}}=119{,}39\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Hasonlóan számolva: $v_{\text{átl min}}=$

$$=\frac{s_{\text{összes}}}{t_{\text{összes}}}=\frac{s}{\frac{0{,}8\cdot s}{130}+\frac{0{,}2\cdot s}{50}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{0{,}8}{130}+\frac{0{,}2}{50}}=98{,}49\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$



plot1/0,8/130+x/50+(0,2-x)/90)×0 ≤ x ≤ 0,2
Computed by WolframlAlpha

Minden más esetben az átlagsebesség e két érték között van. Jöjjön a grafikon! Legyen a teljes megtett út s és $0\le x\le 0{,}2$ a városban megtett út aránya az egész úthoz képest, hiszen a teljes út 20%-a jut az autópályán kívüli részekre. Így az országúton megtett rész aránya az egészhez képest $0{,}2-x$. Mostmár írjuk fel az átlagsebességet: $v_{\text{átl}}=\frac{s_{\text{összes}}}{t_{\text{összes}}}=\frac{s}{\frac{0{,}8\cdot s}{130}+\frac{x\cdot s}{50}+\frac{(0{,}2-x)\cdot s}{90}}=\frac{1}{\frac{0{,}8}{130}+\frac{x}{50}+\frac{0{,}2-x}{90}}$. Ennek ábrázolásához használhatunk grafikonrajzoló alkalmazást, programot. Én a https://www.wolframalpha.com/ oldalt használtam. Látható a grafikonon, hogy az értékek összhangban vannak a fentebb számolt átlagsebességértékekkel.

854. (*8.*) Téli napon egy 0°C-os tóba 2 kg-os, – 30°C-os alumínium darabot lógatunk teljesen a vízbe merülve egy rugós erőmérő végén. Hány %-kal csökken az erőmérő által mutatott kezdeti érték a termikus egyensúly beállta után? ($\rho_{\text{Al}}=2{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; $\rho_{\text{víz}}=1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; $\rho_{\text{jég}}=0{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; $c_{\text{Al}}=900\,\frac{\text{J}}{(\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C})}$; $L_{0\text{jég}}=335\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$). Tételezzük fel, hogy az alumíniumdarab csak a vízzel lép termikus kölcsönhatásba, és a megfagyott víz teljes egészében ráfagy az alumíniumdarabra. (Az alumínium hőtágulásától tekintsünk el. $g=10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.)

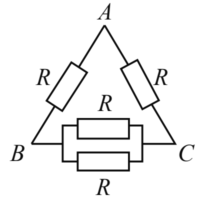
Szatmáry Zsolt

Megoldás: Számoljuk ki először, hogy mekkora az erőmérő által mutatott kezdeti érték: $F_1=m_{\text{Al}}g-F_{\text{fel1}}=m_{\text{Al}}\cdot g-\frac{m_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Al}}}\cdot\rho_{\text{víz}}\cdot g=2\cdot 10-\frac{2}{2700}\cdot 1000\cdot 10=12{,}5926\text{ N}$. A termikus egyensúly akkor áll be, ha az alumíniumdarab felmelegszik 0°C-ra. Felírható, hogy $c_{Al}\cdot m_{Al}\cdot\Delta T=L_{0\text{jég}}\cdot m_{\text{jég}}$, ahol $m_{jég}$ az alumíniumdarabra ráfagyott jég tömegét jelenti. Ebből $m_{\text{jég}}=\dfrac{c_{\text{Al}}\cdot m_{\text{Al}}\cdot \Delta T}{L_{0\,\text{jég}}}=\dfrac{900\cdot 2\cdot(0-(-30))}{335\,000}$=0,1612 kg.

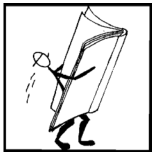
Számoljuk ki most is az erőmérő által mutatott erőt: $F_2=(m_{Al}+m_{\text{jég}})\cdot g-F_{\text{fel2}}=$
$=(m_{\text{Al}}+m_{\text{jég}})\cdot g-\left(\dfrac{m_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Al}}}+\dfrac{m_{\text{jég}}}{\rho_{\text{jég}}}\right)\cdot\rho_{\text{víz}}\cdot g=(2+0{,}1612)\cdot 10-\left(\dfrac{2}{2700}+\dfrac{0{,}1612}{900}\right)\cdot 1000\cdot 10=$
$=12{,}4135$ N. Tehát $\dfrac{F_2}{F_1}=\dfrac{12{,}4135}{12{,}5926}=0{,}9858=98{,}58\%$, azaz 1,42%-kal csökken az erőmérő által mutatott érték. Megjegyzés: ha az F_2-re negatív értéket kaptunk volna, az azt jelentette volna, hogy annyi jég fagyott volna rá az alumíniumdarabra, hogy az már feljött volna a víz felszínére, és ott úszott volna.

855. (*8.*) Lali „feketedobozzal" kísérletezik. Annyit tud róla, hogy – valamilyen módon kapcsolva – 4 darab 1 Ω-os ellenállás van benne. A és B és C kivezetések között méri meg az ellenállást univerzális mérőműszerrel. Az A és B kivezetések között 0,6 Ω-ot, az A és C kivezetések között szintén 0,6 Ω-ot, a C és B kivezetések között 0,4 Ω-ot mért. Hogyan lehetnek az ellenállások kapcsolva a dobozban?

Szatmáry Zsolt

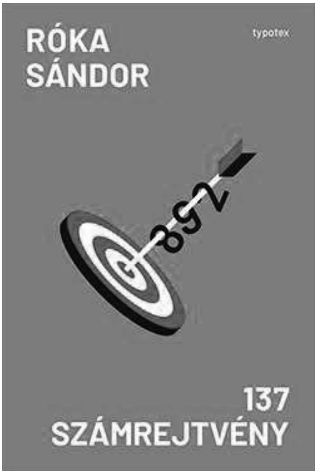


Megoldás: Képzeljük el a kapcsolást, mintha egy *ABC* egyenlő oldalú háromszög csúcsai között lennének az ellenállások valahogyan kapcsolva. Ha megfigyeljük a mért értékeket, akkor láthatjuk, hogy a kapcsolásnak szimmetrikusnak kell lennie a *BC* oldal felezőmerőlegesére. Tehát az *A* és *B*, valamint az *A* és *C* pontok között ugyanolyan ellenállású fogyasztóknak kell lenni, és valami más a *B* és *C* pontok között. Próbálgatással rájöhetünk, hogy a kapcsolás lehet az ábra szerinti, ahol $R=1$ Ω. A számolásban felhasználjuk, hogy a sorosan kapcsolt fogyasztók eredő ellenállását az $R_e=R_1+R_2$, a párhuzamosan kapcsolt fogyasztók eredő ellenállásását a $R_e=\dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}$ képlet alapján határozhatjuk meg. Ezek többszöri alkalmazása révén juthatunk a keresett ellenállásértékekhez. A két párhuzamosan kapcsolt 1 Ω-os ellenállást egy $\dfrac{1\cdot 1}{1+1}=0{,}5$ Ω-os ellenállással helyettesíthetjük. Így $R_{AB}=R_{AC}=\dfrac{1\cdot(1+0{,}5)}{1+(1+0{,}5)}=$ $=0{,}6$ Ω, hiszen ez egy párhuzamos kapcsolás, ahol az egyik ágban 1+0,5 Ω, a másik ágban 1 Ω-os ellenállás van kapcsolva. Hasonlóan gondolkodva, $R_{BC}=\dfrac{0{,}5\cdot(1+1)}{0{,}5+(1+1)}=$ $=0{,}4$ Ω, hiszen itt most egy olyan párhuzamos kapcsolás van, amelyben az egyik ág 1+1 Ω-os, a másik 0,5 Ω-os ellenállású. Tehát ez valóban lehet a fekete dobozban lévő kapcsolás.



K Ö N Y V A J Á N L Ó

Róka Sándor: 137 számrejtvény



Egy rejtvény megoldása mindig jóleső örömmel tölti el a rejtvényfejtőt. A számok világa pedig érdekes világ. Például egy kis csűrés-csavarással könnyedén bebizonyítjuk, hogy minden szám érdekes.

Tétel: *Minden pozitív egész szám érdekes.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Vegyük a legkisebb nem érdekes egész számot. De hiszen ez érdekes szám, mert ez a legkisebb „nem érdekes”! Ellentmondásra jutottunk. Tehát a tétel igaz.

Választottunk egy érdekes számot: a 137-et. Ez lesz a könyv szuperszáma, amelyhez szuper feladatokat tűztünk ki, csak meg kell találni, hogy melyek azok, ha másképp nem, hát az összes megoldásával. Miért éppen ezt a számot választottuk? Nos, különös módon a modern fizikában ez a szám gyakran előfordul. De ebben a könyvben nincs szó a modern fizikáról, csak sok-sok számrejtvényről.

A megoldások a kiadó honlapján szabadon elérhetők.

A könyvesboltokban 3200 Ft-ért kapható, webshopunkban (www.typotex.hu) és az alábbi boltjainkban pedig 25% kedvezménnyel vásárolható meg a többi kiadványunkkal együtt.

Olvasók boltja
1136 Budapest, Pannónia u. 35-37.
www.olvasokboltja.hu

Typotex Kiadó
1024 Bp., Fillér utca 9-11.
www.typotex.hu

ELTE TTK-n lévő pultunk
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/a

K Ö N Y V A J Á N L Ó

Kedves Olvasó! A MATEGYE Alapítvány az alábbi kiadványokat szeretné a figyelmébe ajánlani.

Zrínyi 2019	1900 Ft
Zrínyi 2020	2500 Ft
Zrínyi 2021	2500 Ft
Zrínyi 2022	3000 Ft
Tanárverseny 2004-2013	1600 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 3. osztály	1700 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 4. osztály	1700 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 5. osztály	1700 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 6. osztály	1700 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 7. osztály	1700 Ft
Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai 2001-2010. 8. osztály	1700 Ft
Gordiusz Matematika Tesztverseny feladatai 2007-2008.	1700 Ft
Gordiusz Matematika Tesztverseny feladatai 2009-2010.	1700 Ft
Gordiusz Matematika Tesztverseny feladatai 2011	1700 Ft
Gordiusz Matematika Tesztverseny feladatai 2012	1700 Ft
Zrínyi 2013 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2014 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2016 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2017 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2018 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2019 (9-12. osztály)	1700 Ft
Zrínyi 2020 (9-12. osztály)	2000 Ft
Zrínyi 2021 (9-12. osztály)	2000 Ft
Zrínyi 2022 (9-12. osztály)	2500 Ft
Fizika az Abacusban	2500 Ft
Bátaszéki Matematikaverseny 2008-2016	2500 Ft
Matematika az Abacusban 2000-2004	2500 Ft
Matematika az Abacusban 2005-2009	2500 Ft
Matematika az Abacusban 2010-2014	2500 Ft
Hibás feladatmegoldások az ált. isk.-ban – Orosz Gyula	1900 Ft
Gordiusz csomag (Gordiusz 2009-2010., 2011., 2012. évi könyvek)	4000 Ft
KMF csomag 2001-2010. évi versenyfeladatok (3., 4., 5., 6., 7., 8. osztály)	7000 Ft

A kiadványok az alábbi elérhetőségeken rendelhetők meg:

Tel.: 76/483-047 E-mail: **mategye@mategye.t-online.hu**